

13. Двудольные графы

Теория.

Двудольный граф. Граф называется двудольным, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что никакие две вершины одного цвета не будут соединены ребром. Множество вершин одного цвета называется долей графа.

Задачи.

13.1. Докажите, что сумма степеней вершин одной доли двудольного графа равна сумме степеней вершин другой доли.

13.2. Какое наибольшее число ребер может быть в двудольном графе с

(а) $2n$ вершинами;

(б) $2n + 1$ вершинами?

13.3. У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

13.4. Докажите, что всякое дерево является двудольным графом.

13.5. *Критерий двудольности графа.* Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.

13.6. В строку выписано 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитана ее сумма (группы из одного числа тоже учитывались). Какое наибольшее количество сумм могло оказаться нечетными?

13.7. Вершины связного графа пронумеровали числами от 1 до n , затем на каждом ребре записали сумму номеров его концов, а номера в вершинах стерли. Докажите, что если граф не двудольный, то нумерация однозначно восстанавливается.

13.8. Дан полный граф на 2023 вершинах. Каждую минуту в нем выбирают цикл длины 4 и удаляют одно из ребер этого цикла. Какое наименьшее количество ребер может остаться в графе в результате таких операций?