

11. Алгоритм Евклида

Теория.

Наибольший общий делитель. Наибольшим общим делителем (НОД) чисел a и b называется самое большое натуральное число, на которое каждое из чисел a и b делится нацело. Обозначается наибольший общий делитель через $(a; b)$.

Теорема 1. $(a; b) = (a - b; b)$.

Теорема 2. Пусть число a при делении на b даёт остаток r . Тогда $(a; b) = (r; b)$.

Алгоритм Евклида. Рассмотрим пару чисел a и b и применим к ней одну из предыдущих теорем. Получим новую пару чисел с тем же наибольшим общим делителем, но с меньшей суммой. Применим одну из предыдущих теорем к полученной паре и т.д. Возникает цепочка пар чисел, в каждой из которых один и тот же НОД, а сумма чисел уменьшается. Рано или поздно получим пару, в которой одно из чисел равно 0. При этом НОД равен другому числу в итоговой паре. Таким образом, мы нашли НОД исходной пары чисел. Предложенный алгоритм поиска наибольшего общего делителя носит название алгоритма Евклида.

Задачи.

11.1. С помощью алгоритма Евклида найдите следующие НОДы:

(а) (54, 33); (б) (2022, 4381); (в) (987, 610).

11.2. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима ни при каком натуральном n .

11.3. Какое наибольшее значение может принимать $(3n + 2, 10n + 23)$?

11.4. Найдите следующие НОДы:

(а) (111111, 1111); (б) ($\underbrace{111\dots1}_{54 \text{ единицы}}, \underbrace{111\dots1}_{33 \text{ единицы}}$); (в) ($\underbrace{111\dots1}_m, \underbrace{111\dots1}_n$).

11.5. Найдите следующие НОДы:

(а) $(2^6 - 1, 2^4 - 1)$; (б) $(2^{54} - 1, 2^{33} - 1)$; (в) $(2^m - 1, 2^n - 1)$.

11.6. У доктора Пилюлькина есть двухчашечные весы, гирьки массой 2023 грамм и 1700 грамм, а также много касторки, много невесомых пластиковых бутылочек и много терпения. Сможет ли он отмерить ровно

(а) 17 граммов; (б) 20 граммов; (в) 51 грамм

касторки?

11.7. Даны два целых числа a и b . Выражение вида

$$n \cdot a + m \cdot b$$

(где m и n — некоторые целые коэффициенты) называется линейной комбинацией чисел a и b . Докажите, что

а) НОД чисел a и b является их линейной комбинацией.

б) число может быть представлено в виде линейной комбинации a и b тогда и только тогда, когда оно делится на НОД чисел a и b .