

0. (На разбор) На экране компьютера написано число 76543210. Каждую секунду компьютер уменьшает написанное число на его сумму цифр. Чему равно последнее ненулевое число?

В этой задаче (и в задачах ниже) происходит *некоторый процесс*. Процесс идёт, числа меняются, но что-то остаётся неизменным. Такое неизменное свойство называется **инвариантом**.

1. Вначале на экране компьютера написано число 13. На каждом шаге компьютер выписывает на экран ещё одно число, которое либо больше предыдущего на сумму двух первых цифр (если эта сумма цифр делится на 4), либо на 10 (если эта сумма цифр на 4 не делится).

а) Выписано 2000 чисел. Есть ли среди них шестизначные?

б) Выписано 1000000 чисел. Есть ли среди них число 444444?

2. На доске 7×7 без угловых клеток в каждой клетке сидит по жуку. Каждую минуту все жуки одновременно переползают в одну из соседних по стороне клеток. Какое наибольшее число жуков может собраться в одной клетке?

3. а) В пещере живёт 2024-головая гидра. Геракл за один удар может срубить либо 7 голов, либо 33 головы. Если после удара Геракла у Гидры не осталось голов, то Гидра убита. Иначе Гидра регенерирует: если было срублено 7 голов, то вырастает 77 новых голов, а если было срублено 33, то вырастает 8. Сможет ли Геракл убить Гидру?

б) А если у Гидры изначально было 2023 головы, то сможет ли Геракл убить Гидру?

4. В трёх кучках лежит 5, 8 и 18 камней. За одну операцию можно в одну кучку добавить один камень, а в другую — пять камней.

а) Можно ли добиться, чтобы каждые две кучки отличались не больше чем на один камень?

б) Можно ли добиться, чтобы во всех кучках было поровну камней?

5. На доске написаны числа 10, 20, 30, 40, 50. Разрешается выбрать любое число, уменьшить его в простое число раз (но так, чтобы оно осталось целым), а одно из других чисел увеличить в другое простое число раз. Можно ли такими операциями получить набор 20, 30, 40, 50, 60?

Дополнительные задачи

6. На столе лежит куча из 2222 орехов. Разрешается выбрать кучу, в которой не менее трёх орехов, съесть из неё один орех и поделить её на две кучи. Какое наибольшее число орехов можно съесть, оставив на столе кучи не менее чем из трёх орехов каждая?

7. Изначально даны три числа: 7, 21 и 35. Каждым ходом выбирали одно из чисел, вычитали его из суммы двух других и заменяли это выбранное число на полученный результат (например, число 7 можно заменить на число $35 + 21 - 7 = 49$). После нескольких ходов получили три числа, наименьшее из которых равно 2023. Найдите два других числа.

8. По кругу лежат 40 монет: две орлом, две решкой, две орлом, две решкой и т.д. Разрешается перевернуть монету, если одна из её соседок лежит орлом, а другая — решкой. Какое наибольшее число монет может одновременно лежать орлом в результате таких операций?