

В математике (и не только) сложная конструкция получается постепенным построением. Если известно, что какой-то простой шаг нужно повторить, скажем, 20 раз, то понятно, как осуществить задуманное. При этом не обязательно 20 раз выписывать один и тот же кусочек инструкции.

0. а) Вовочка нарисовал на плоскости треугольник, после чего провел 28 прямых, которые разделили треугольник на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей снова треугольник.

б) Придумайте набор из 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

1. а) Уитли решил разрезать квадрат на 100 квадратов (не обязательно равных). После всех разрезов и тщательных подсчётов обнаружилось, что он разрезал квадрат не на 100, а только на 97 квадратов. Как Уитли исправить положение и получить ровно 100 квадратов, не переделывая всю работу?

б) Теперь Уитли нужно получить 1000 квадратов из уже имеющихся 100 квадратов. Как ему сделать это?

в) А если Уитли нужно получить 1001 квадрат из имеющихся 100 квадратов?

2. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 77 прямоугольных треугольников.

3. У бородатого многоугольника на внешней стороне растёт щетина. Его пересекают 50 прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растёт щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.

4. Сложите из доминошек 2×1 квадрат 10×10 так, чтобы ни в какой точке не соприкасались уголками четыре доминошки.

5. В концах диаметра окружности стоят единицы. На первом шаге каждая из получившихся дуг делится пополам, и в её середине пишется сумма чисел, стоящих в концах. Затем то же самое делается с каждой из четырёх полученных дуг и т.д. Такая операция проделывается 2023 раза. Найдите сумму всех полученных чисел.

Дополнительные задачи

6. К берегу реки подошли дядька Черномор и 33 богатыря. Богатыри стоят в ряд, причём каждые двое богатырей, стоящих рядом — друзья. Богатыри, не стоящие рядом, между собой не дружат. Дядька Черномор дружит со всеми, кроме среднего богатыря. У них есть лодка, в которой могут плыть либо двое друзей, либо трое попарно дружащих (в одиночку плыть нельзя). Как им всем переправиться на другой берег?

7. а) Нарисуйте на клетчатой бумаге в ряд 10 фигур разной площади, состоящих из целых клеток, чтобы из любых двух соседних фигур можно было сложить квадрат.

б) То же задание, но каждая фигура не должна содержать квадратик 2×2 .

8. Шахматному королю нужно обойти доску 40×40 (нужно побывать на каждой клетке, при этом на одной клетке можно побывать несколько раз). Как ему это сделать, поменяв направление своего движения не более 77 раз? Король может начинать обход с любой клетки.