

Граф — это набор из вершин и рёбер. Каждое ребро соединяет две вершины. **Вершины** изображаются как точки, а **рёбра** — как прямые или кривые линии.

Ребро называется **петлёй**, если оно соединяет вершину с этой же вершиной.

Ребро называется **кратным**, если есть ещё одно ребро, соединяющее эти же вершины. Количество рёбер, соединяющих эти вершины, называется **кратностью ребра**.

Путь — это последовательность вершин, каждая из которых соединена со следующей ребром.

Граф называется **связным**, если любые две его вершины связаны путём (то есть всегда существует путь от первой вершины до второй).

1. Переформулируйте утверждения в терминах теории графов.

- В государстве 10 городов и 20 дорог.
- Каждая дорога соединяет два разных города.
- Каждая пара городов связана не более чем одной дорогой.
- Из города А можно добраться в город В по дорогам.
- Из любого города можно добраться до любого другого по дорогам.
- Из города С можно добраться в город D, только пройдя более чем по одной дороге.

2. В государстве 11 городов. Из 5 городов выходит по 4 дороги, а из остальных — по 5. Каждая дорога соединяет два разных города, каждые два города соединяет не более одной дороги.

- Сколько всего дорог в государстве?
- Может ли быть так, что из одного города нельзя добраться до другого по дорогам?

3. а) Докажите, что в любом связном графе есть путь, проходящий через все его рёбра.

б) Сформулируйте обратное следствие. Верно ли оно?

4. В стену забито 6 гвоздей, на которых подвешено 10 верёвок (конец каждой верёвки подвешен за один из гвоздей). Может ли быть так, что

- на одном из гвоздей не висит ни одной верёвки?
- на 3 гвоздях не висит ни одной верёвки?
- на 5 гвоздях не висит ни одной верёвки?

5. Восемь шахматистов во время турнира должны сыграть друг с другом по одной партии. В какой-то момент турнира шахматистов попросили подсчитать, сколько партий они уже сыграли. Могли ли у них получиться следующие результаты?

- 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4.
- 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6.
- 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 8.
- 1, 2, 2, 4, 5, 6, 7, 7.

Дополнительные задачи

6. В графе вершины А, В, С и D попарно различны. Кратчайший путь (путь, проходящий через наименьшее число рёбер) между вершинами А и В проходит через n рёбер, а кратчайший путь между вершинами С и D — через m рёбер. При этом $m \leq n$. Найдите минимальное число рёбер в графе.

7. В каких из перечисленных случаев граф гарантированно является связным?

- Одна вершина графа связана путём с любой другой.
- В графе 10 вершин, из каждой вершины выходит 9 рёбер.
- В графе 100 вершин, из одной из них выходит 99 рёбер, нет кратных рёбер.
- Каждая вершина графа лежит на одном и том же пути.
- Каждое ребро графа — петля.
- Количество рёбер в графе в 100 раз больше количества вершин, нет петель и кратных рёбер.

8. В графе 20 рёбер, а кратность каждого из них не превосходит трёх. Из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро. Найдите минимальное и максимальное число вершин в этом графе, если

- в нём нет петель;
- в нём есть хотя бы одна петля.