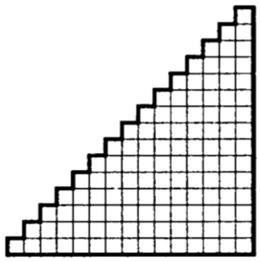
Строить нужный пример не обязательно с начала и по порядку. Бывает, что строить удобнее «задом наперёд», с конца. Так делают, когда путь «с начала» ветвится, и трудно понять, какой выбор сделать на очередном шаге, чтобы добраться до намеченной цели. Скажем, распускать уже связанный шарф проще, чем вязать его с самого начала.

0. (На разбор.) Докажите, что квадрат размером 64×64 без одной клетки можно разрезать на уголки из трёх клеток.

1. а) С натуральным числом можно делать одну из двух операций: приписывать справа цифру 2 или же делить число на 2 (эту операцию можно делать только с чётным числом). Можно ли такими операциями получить из числа 2 число 25?
б) А можно ли из числа 2 получить число 18?

2. На какое наименьшее число квадратов можно разрезать лесенку из 15 ступеней? (См. рисунок.)



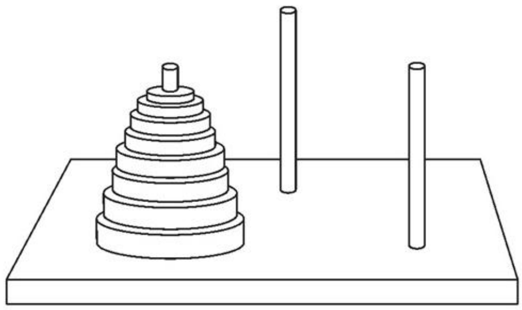
3. Соединив крайними клетками вертикальный и горизонтальный клетчатые прямоугольники ширины 1, получим *уголок.* Докажите, что клетчатый квадрат размера 100×100 клеток без любой клетки можно разрезать на уголки, состоящие из различного нечётного числа клеток.

4. У Вовочки есть 77 батареек. Известно, что среди них более половины батареек работают. У Вовочки есть также фонарик, который работает от двух батареек. Фонарик светит, если в него вставлены две работающие батарейки. Как Вовочке не более чем за 40 попыток добиться, чтобы фонарик светил?

5. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы ладьи одного цвета не били друг друга. (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других ладей.)

Дополнительные задачи

6. (Игра “Ханойская башня”) Имеется пирамида с 8 кольцами возрастающих размеров и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее.
а) Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней.
б) Сколько перекладываний у вас получилось?



7. Назовём натуральное число *ровным*, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (в частности, все однозначные числа тоже являются ровными). Докажите, что любое 19-значное число можно представить в виде суммы не более чем 20 ровных чисел.

8. На окружности отмечено 300 точек: по 100 точек синего, красного и зелёного цветов. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в этих точках, чтобы никакие два отрезка не пересекались (даже в концах) и концы каждого отрезка были разного цвета.