# Малый мехмат - 6 класс 4. Множества и включения-исключения 25.10.2025

4.1. Из 100 детей-русов, отправляющихся в славянский оздоровительный лагерь, писать на бересте умеют 35 ребят, кататься на тиранозавре — 44, уклоняться от стрел — 46. Кататься на тиранозавре и писать на бересте умеют 16 ребят, кататься на тиранозавре и уклоняться от стрел — 20, писать на бересте и уклоняться от стрел — 9, а всеми тремя древнерусскими премудростями владеют 5 детей. Сколько ребят не умеют ни писать на бересте, ни кататься на тиранозавре, ни уклоняться от стрел?

**Ответ.** 15.

**Решение.** По формуле включений-исключений для трёх множеств, хоть что-то умеют $35 + 44 + 46 - 16 - 20 - 9 + 5 = 85$ ребят. Значит ответ $100 - 85 = 15$.

4.2. Среди воинов ящеров каждый шестой учёный. Среди ученых ящеров каждый четвертый воин. Во сколько раз воинов ящеров больше, чем ученых, которые не являются воинами?

**Ответ:** в 2 раза.

Пусть A — воины, B — учёные.

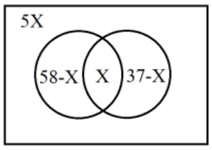
Количество $|A \cap B|$ воинов, знающих науку, обозначим через x.

Тогда $A = 6x$ и $B = 4x$. Число ученых, не умеющих сражаться, $3x$. Это вдвое меньше, чем воинов.

4.3. Из 111 детей-русов, учащихся в шестом классе, кататься на птеродактиле умеют 58 ребят, на стегозавре — 37, а число катающихся на обоих динозаврах сразу в пять раз меньше, чем число не катающихся ни на одном. Сколько шестиклассников-русов не умеют кататься ни на птеродактиле, ни на стегозавре?

**Ответ:** 20.

**Решение:**




Достаточно нарисовать круги Эйлера и обозначить количество ребят, которые катаются на обоих динозаврах за x. Тогда $5x + 58 + 37 – x = 111$, а значит $x = 4$, $5x = 20$.

4.4. В стране Гиперборее все русы занимаются охотой на ящеров или пасут динозавров (не запрещается делать и то, и то). Профессор Багиров выяснил, что любой рус состоит ровно в одной из трёх каст: Аз, Буки и Веди. Все Азы охотятся на ящеров и против выпаса динозавров. Все Буки пасут динозавров, но не охотятся на ящеров. Также профессор подсчитал, что в Гиперборее ровно три миллиона русов пасут динозавров, три миллиона охотятся на ящеров, а еще в каждой из трех каст тоже состоит ровно три миллиона русов. Не ошибся ли профессор Багиров?

**Ответ.** Ошибся.

**Решение:** Ошибся. Есть несколько способов это доказать, используя круги Эйлера. Например, такой: большие круги обозначают охотников на ящеров и пастухов динозавров. Тогда суммарно русов не более шести миллионов. С другой стороны, исходя из трех непересекающихся каст, русов не менее девяти миллионов.


4.5. Древние русы собирают войско для борьбы с ящерами. Набрали тьму (10000) храбрых русичей, всех пронумеровали. Сколько среди них воинов,

а) Номера которых делятся на 3 и 5, но не делятся на 7?

б) Номера которых не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

в) Номера которых имеют ровно 2 делителя из набора {3, 5, 7}?

**Решение:** Обозначим за N(k) количество русов с номерами, номера которых делятся на k. Чтобы посчитать N(k), нужно поделить 10000 на k с остатком. Остаток нам не важен, а результат деления будет равен N(k).

а) $N(15) - N(105) = 571$.

б) По формуле включений-исключений для трёх множеств, ответ $10000 - ((N(3) + N(5) + N(7)) - (N(15) + N(21) + N(35)) + N(105)) = 10000 - ((3333+2000+1428) - (666 + 476 + 285) + 95) = 4571$.

в) Посчитаем количество чисел, которые делятся на 2 или больше делителей и вычтем из него количество чисел, делящихся ровно на 3 делителя. $(N(15) + N(21) + N(35) - 2*N(105)) - N(105) = 666 + 476 + 285 - 3*95 = 1142$.

4.6. На каменном помосте лежали 36 дощечек с рунами — все они были обращены рунами вниз. Сначала юный волхв Ладимир перевернул 30 дощечек. Потом дружинник Мирослав перевернул ещё 19 дощечек, а следом мудрый старец Боривой — 21 дощечку. Когда старец закончил, оказалось, что все дощечки лежат рунами вверх. Сколько дощечек было перевёрнуто трижды?

**Ответ:** 17.

**Решение:** Обозначим множества перевернутых дощечек буквами: L = 30 (Ладимир), M = 19 (Мирослав), B = 21 (Боривой). Поскольку перевернутыми оказались все дощечки, по формуле включений и исключений для трех множеств имеем: $36 = |L| + |M| + |B| − |L\cap M| − |M\cap B| − |L\cap B| + |L\cap M\cap B|$. Каждая дощечка изначально лежала руной вниз, а в итоге оказалась руной вверх, поэтому она была перевернута либо один раз, либо три раза. Иными словами, никакая дощечка не переворачивалась ровно два раза, а это означает, что $|L\cap M| = |L\cap M\cap B|$, $|M\cap B| = |L\cap M\cap B|$, $|L\cap B| = |L\cap M\cap B|$. Особенно хорошо это видно на кругах Эйлера ($|L\cap M\cap B| = x$).

В итоге имеем:

$36 = |L| + |M| + |B| − |L\cap M\cap B| − |L\cap M\cap B| − |L\cap M\cap B| + |L\cap M\cap B| = |L| + |M| + |B| − 2 \cdot |L\cap M\cap B| = 30 + 19 + 21 − 2x$, откуда $x = 17$.

4.7. На некоторой местности проживают 2 племени - вятичи и кривичи. Племена состоят из красных девиц и добрых молодцев. Среди всех жителей обоих племен есть обученные грамоте, а есть не обученные. Известно, что девиц-кривичей обученных грамоте всего 9; девиц-вятичей, не обученных грамоте – 7, молодцев-кривичей, не обученных грамоте – 10. Вятичей обученных грамоте – 13; молодцев-вятичей – 18; молодцев обученных грамоте – 12. Кроме того, девиц-кривичей не обученных грамоте всего 7. Также у вятичей есть элитная дружина. Известно, что в этой элитной дружине всего 20 человек. Из них 7 девиц. Сколько всего молодцев-вятичей обученных грамоте, но не входящих в элитную дружину, если известно, что не обученных грамоте дружинников-молодцев 8?

**Ответ:** 0-5.

**Решение:**

V — вятичи, K — кривичи; M — молодцы, D — девицы; L — обучены грамоте, ¬L — не обучены

Искомое: число $|V \cap M \cap L|$ вне дружины.

Из условия:

$|K \cap D \cap L| = 9$, $|K \cap D \cap \neg L| = 7$;

$|K \cap M \cap \neg L| = 10$;

$|V \cap L| = 13$ (все грамотные вятичи);

$|V \cap M| = 18$ (все молодцы-вятичи);

$|M \cap L| = 12$ (все грамотные молодцы);

Дружина — подмножество V, в ней 20 человек: 7 девиц, и 8 неграмотных молодцев ⇒ грамотных молодцев-вятичей в дружине ровно 5.

Пусть $c = |V \cap M \cap L|$ — количество всех грамотных молодцев-вятичей. Тогда искомое равно $c - 5$.

Ограничения на c:

1. из $|V \cap L| = 13$ следует $|V \cap D \cap L| = 13 - c >= 0 \Rightarrow c <= 13$;

2. из $|V \cap M| = 18$ имеем $|V \cap M \cap \neg L| = 18 - c >= 8$ (чтобы возможно было набрать 8 неграмотных молодцев в дружину) $\Rightarrow c <= 10$;

3. из $|M \cap L| = 12$ получаем $|K \cap M \cap L| = 12 - c >= 0$ $(\neg K = V) \Rightarrow c <= 12$;

4. раз в дружине есть 5 грамотных молодцев-вятичей, то $c >= 5$.

Совмещая, получаем $5 <= c <= 10$, а значит искомое $c - 5$ лежит в диапазоне от 0 до 5.

Этот диапазон достижим: при любом c = 5,6,7,8,9,10

4.8. До генерального сражения с ящерами осталось ровно 180 дней. Воин Грознослав составил себе программу тренировок, состоящую из четырёх элементов; каждый из них Грознослав будет делать раз в несколько дней с одинаковыми промежутками. Каждые два дня он будет делать приседания. Каждые три дня — отжиматься. Раз в пять дней — биться на мечах. Известно, что в его программе 48 дней отдыха без упражнений. В первый день он сделал все четыре упражнения. Как часто в программе у Грознослава стоят полёты на птеродактиле, если известно, что он будет летать не реже, чем раз в 10 дней? Найдите все варианты.

**Ответ.** Раз в 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, или 10 дней.

**Решение:** Сначала представим, что полетов на птеродактиле у Грознослава нет вообще. Тогда можно нарисовать круги Эйлера и рассуждать на них. Все три упражнения Грознослав делает каждые 30 дней, это 6 раз (пересечение трех кругов). НОК(2,3) = 6, значит дней с отжиманиями и приседаниями 180/6 = 30. Аналогично находим, что дней с приседаниями и боем на мечах – 180/10 = 18, а дней с отжиманиями и боем на мечах 180/15 = 12. Дней с приседаниями тогда 180/2 = 90, дней с отжиманиями 180/3 = 60, а дней с боем на мечах 180/5 = 36. Отсюда по формуле включений-исключений находим, что всего дней с одним из этих трех упражнений 90 + 60 + 36 – 30 – 18 – 12 + 6 = 132, а значит дней без этих трех упражнений 180 – 132 = 48. (Это можно посчитать по кругам Эйлера без ф-лы В-И, но сложнее.) Это значит, что полеты на птеродактиле могли быть только в дни, когда Грознослав делал какое-то другое упражнение. Если периодичность полетов не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, то в день второго полета других упражнений не будет – противоречие. Значит, на одно из этих чисел периодичность полетов делится. Итого, ответ: раз в 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, или 10 дней.

4.9. Добрыня хочет поставить троих дружинников в качестве часовых для охраны крепости в форме равностороннего треугольника. На каждой стене крепости есть башни, которые разделяют эту стену на 2025 равных частей. Часовых можно ставить только в эти башни. В углах крепости часовых располагать нельзя. Чтобы ни один ящер не ускользнул от зоркого глаза часовых, нужно выбрать 3 такие точки для расстановки часовых, чтобы треугольник, образованный ими, не имел ни одной стороны, параллельной стене крепости. Сколькими способами Добрыня может выбрать эти 3 места для часовых?

**Ответ:** $2024^3 - 3 \cdot 2024^2 + 3 \cdot 2024$

**Решение:** Всего треугольников с вершинами в башнях $2024^3$. Треугольников, у которых основание параллельно одной фиксированной стороне, $2024^2$ (фиксируем одну из точек основания (2024 способа), вторая определяется автоматически (на том же уровне делений). И у нас 2024 способа выбрать третью вершину). И так для каждой стороны = $3 \cdot 2024^2$. Треугольников, у которых две стороны параллельны соответствующим основаниям, 2024 (определяется выбором вершины, из которой выходят эти параллельные основаниям стороны. Вторая вершина и третья вершины определяются однозначно на том же уровне делений). И так для каждой стороны = $3 \cdot 2024$. Наконец, треугольников, у которых все 3 стороны параллельны соответствующим сторонам, нет. Потому что у нас нет точек на серединах сторон, в которые можно ставить вершины. По формуле включений-исключений, нужных нам треугольников $2024^3 - 3 \cdot 2024^2 + 3 \cdot 2024$.