

5. Делимость.

Теория.

Важная идея. Если каждое из двух целых чисел делится на число d , то их сумма и разность тоже делятся на d .

Следствие. Если каждое из нескольких целых чисел делится на число d , то и их сумма делится на d .

Задачи.

8.1. Немой Джо вошел в салун и жестами потребовал у бармена три бутылки виски, шесть сигар и двенадцать новых подков для своих мустангов. «С вас семь долларов, тринадцать центов,» — сказал бармен, после чего Джо молча вытащил револьвер. Как он догадался, что бармен пытается его обсчитать?

8.2. Ксюша расставила в клетках прямоугольника 8×13 натуральные числа так, что сумма чисел в каждой из восьми строк оказалась равна 1000. Может ли оказаться, что в каждом из тринадцати столбцов суммы чисел также равны между собой?

8.3. У Игоря есть много–много карточек, на каждой из которых написано одно из чисел 7, 21, 84 или 119. Он составил из таких карточек несколько натуральных чисел, а затем все составленные числа сложил. Мог ли он получить число 10^{2021} (единица и затем 2021 ноль)?

8.4. В столовой продают вкусные булочки. Прозвенел звонок и орда голодных школьников ринулась в столовую. Сперва в столовую прибежали несколько мальчиков и выстроились в очередь. Затем между каждыми двумя мальчиками в очередь влезло по одной девочке. Потом между каждыми двумя детьми влезло еще по одной девочке. Потом между каждыми двумя соседними девочками влезло еще по одному мальчику. Могло ли оказаться, что теперь в очереди стоит 2021 человек?

8.5. Каждый раз, когда европейцы стреляют из пушки ядром без предупреждения, турки отвечают двумя выстрелами. Каждый раз, когда турки стреляют ядром без предупреждения, европейцы отвечают пятью выстрелами. Сидя в окопе, барон Мюнхгаузен насчитал ровно 1000 пушечных ядер. Докажите, что он ошибся.

8.6. По кругу записано 2021 натуральное число. Для каждых трех последовательных чисел Боря вычислил их сумму и все полученные суммы записал на отдельный лист бумаги. Он утверждает, что у него 1000 раз получилось число 100, 1000 раз получилось число 103, 20 раз получилось число 97 и один раз получилось число 106. Докажите, что он ошибся по меньшей мере один раз.