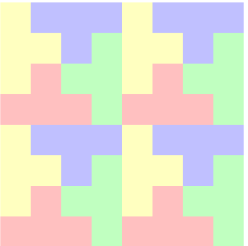
14.1. *Можно ли замостить доску:* ***а)*** *8×8;* ***б)*** *10×10 с помощью Т-тетраминó? (Тетраминó — связная фигура из четырёх клеток, как в «тетрисе». Т-тетрамино имеет форму буквы Т.)*



Решение. **а) Можно** (см. рисунок справа). **б) Нельзя.** При шахматной раскраске каждая фигура Т-тетрамино содержит нечётное число (1 или 3) чёрных клеток. Чтобы замостить доску, нужно $100:4 = 25$ тетраминошек. Но тогда в них в сумме будет нечётное число (сумма 25 нечётных слагаемых) чёрных клеток, а их должно быть 50.

14.2. *Может ли шахматный конь пройти с клетки A1 на клетку H8, побывав по дороге на каждой из остальных клеток ровно по одному разу?*

Ответ: не может. ***Решение.*** Чтобы обойти все клетки шахматной доски, надо сделать 63 хода. Клетка A1 — чёрная. Первым ходом конь попадёт на белую клетку, вторым — на чёрную, третьим — снова на белую, и т. д. Поэтому после любого нечётного хода (в том числе после 63-го) конь окажется на белой клетке. А клетка H8 — чёрная.

14.3. *У Коли был набор «Юный паркетчик». В нём было несколько квадратиков 2×2 и несколько тетрамино вида «Т». Из набора Коля без наложений складывал доску 12×12 (и лишних паркетинок не оставалось). Коля потерял один квадратик, и в магазине купил вместо него тетрамино вида «Т». Докажите, что теперь Коля не сможет сложить доску 12×12.*

Решение. При шахматной раскраске любой квадратик содержит чётное число чёрных клеток, а любая Т-шка — нечётное. Изначально на доске чётное число чёрных клеток (72), значит, Т-шек чётное число. После замены квадратик на Т-шку их станет нечётное число, а значит, и суммарное число чёрных клеток в них будет нечётным.

14.4. *По вершинам кубика ползает муха. Каждую секунду муха переползает по ребру в соседнюю вершину кубика. Может ли через час муха оказаться в вершине, которая соединена ребром с начальной вершиной?*

Решение. Раскрасим вершины куба в шахматном порядке. После этого заметим, что муха, спустя каждые 2 секунды (а значит и по истечении часа) находится в вершине куба такого же цвета, как и изначальная вершина (вершина, с которой муха начала свой путь). Таким образом, через час муха **не может** оказаться в вершине соединённой ребром с изначальной, так как все эти вершины «противоположного» цвета.

14.5. *Можно ли расставить на шахматной доске:* ***а)*** *6 коней;* ***б)*** *7 коней так, чтобы каждый конь бил ровно двух других?*

Решение. **а)** Можно; **б)** нельзя. В первом случае можно поставить коней, например, на клетки A2, B4, C1, D5, E2, F4. Во втором случае: конь, стоящий на белой клетке, бьёт только коней, стоящих на чёрных клетках, и наоборот. Первый конь (пусть он на чёрной клетке) бьёт двух разных коней на белых клетках. Эти два коня бьют ещё по одному коню на чёрной клетке. Если этот конь общий, то цикл из 4 коней замкнулся, и нужно составить ещё один цикл из трёх коней, что невозможно. Если нет, то каждый из двух новых коней на чёрных клетках бьёт по одному коню на белых клетках. Если это один и тот же конь, то цикл из 6 коней замкнулся, и 7-го коня бить некому. Если это два разных коня, то коней уже 7, и этих последних двух коней бьёт только по одному другому коню.

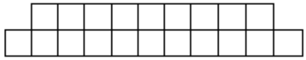
14.6. *В одной вершине куба написано число 1, а в остальных — нули. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться, чтобы все числа делились:* ***а)*** *на 2;* ***б)*** *на 3?*

Ответ: нельзя в обоих пунктах. ***Решение.*** Покрасим вершины куба в шахматном порядке. Изначально сумма чисел на чёрных вершинах будет равна 1, а на белых — 0 (или наоборот). Соседние вершины всегда разных цветов. Поэтому при добавлении единицы к числам в двух соседних вершинах мы увеличим на 1 сумму чисел как в чёрных, так и в белых вершинах. Значит, эти две суммы всегда будут отличаться на 1. Таким образом, **а)** одна из этих сумм обязательно будет нечётной (поэтому все числа нельзя сделать чётными), **б)** разность этих сумм не поделится на 3 (а если бы все числа делились на 3 — то поделилась бы).

14.7. *Тридцать пять хулиганов вышли на демонстрацию с шариками и выстроились в пять колонн по семь человек. По команде каждый проткнул иголкой шарик своего соседа (спереди, сзади или сбоку). Какое наименьшее число целых шариков могло при этом остаться? Один шарик могут одновременно проткнуть и несколько хулиганов.*

Решение. Покрасим хулиганов в шахматном порядке. Тогда каждый из них будет протыкать шарик хулигану другого цвета. Значит, если «чёрных» хулиганов будет 18, а «белых» 17, то по крайней мере один шарик у какого-то «чёрного» хулигана точно останется целым. Легко придумать пример, когда останется **ровно один** целый шарик: для этого надо всех хулиганов, кроме одного «чёрного», разбить на пары «чёрный – белый», чтобы хулиганы в каждой паре протыкали шарики друг другу, а оставшийся без пары хулиган протыкал бы шарик кому-то из своих соседей (причём этот шарик будет протыкать и кто-то ещё из хулиганов).

14.8. *В каждой клетке фигуры, показанной на рисунке, стоит гиря. Из них 18 гирь — настоящие, весящие одинаково. Две — фальшивые, они легче настоящих и, возможно, разной массы. Фальшивые гири расположены в соседних по стороне клетках. Как за три взвешивания на чашечных весах (без других гирь) узнать, в каких клетках расположены фальшивые гири?*



Решение. Раскрасив клетки фигуры в шахматном порядке, заметим, что фальшивые гири стоят на соседних клетках разных цветов. Пусть белых клеток 9, а чёрных 11. За 2 взвешивания найдём белую клетку с фальшивой гирей, а затем за оставшееся взвешивание среди трёх её чёрных соседей найдём вторую фальшивую гирю. Для этого разделим 9 белых гирь на группы по 3 и две группы взвесим; в более лёгкой группе (если она есть) и будет фальшивая гиря, а если группы уравновесились, то лёгкая гиря в третьей группе. Вторым взвешиванием точно так же найдём в более лёгкой группе фальшивую гирю. Третье взвешивание делается аналогично.

14.9. *Для игры в классики на земле нарисованы клетки с числами от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?*

1	*4*	*5*	*8*	*9*
2	*3*	*6*	*7*	*10*

Решение. Покрасим клетки в шахматном порядке: клетки с нечётными числами будут белыми, а с чётными — чёрными. Каждым прыжком Маша меняет цвет клетки. Более того, она начинает движение с белой клетки, а заканчивает на чёрной. Значит, клеток чёрного и белого цвета на её маршруте будет поровну. В белых клетках она побывает $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ раз, а в чёрных (кроме 10-й) — $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ раз. Значит, в 10-й клетке она побывает **5 раз.** Можно построить соответствующий пример (хотя если мы уверены в корректности задачи, то он и не требуется):

12323434545456565676767678787878989898989X9X9X9X9X (X=10).