

14. Признаки равноостаточности.

Теория.

Признаки равноостаточности по модулю 2^k и 5^k . Пусть последние k цифр числа n образуют число t . Тогда число n сравнимо с числом t по модулю 2^k и по модулю 5^k .

Признаки равноостаточности по модулю 3 и 9. Каждое число сравнимо со своей суммой цифр по модулю 3 и по модулю 9.

Признак равноостаточности по модулю 11. Пусть задано число n . Поставим перед цифрой в разряде единиц знак «плюс», перед цифрой в разряде десятков — знак «минус» и так далее. Тогда полученная знакопеременная сумма цифр сравнима с исходным числом по модулю 11.

Задачи.

1. Сколько существует четырёхзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них — 97?

2. Незнайка выписал пример на умножение, а затем заменил все цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные цифры — разными. У него получилось равенство $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{effe}$. Докажите, что Незнайка ошибся.

3. Докажите, что степень двойки не может оканчиваться на четыре одинаковые цифры.

4. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого использованы все 10 цифр.

5. Может ли сумма цифр точного квадрата равняться 2022?

6. Докажите, что число $\overline{a_1 a_2 \dots a_n a_n \dots a_2 a_1}$ не может быть простым. (Предполагается, что $n \geq 2$.)

7. В натуральном числе A переставили цифры и получили натуральное число B . Оказалось, что разность чисел A и B состоит из одних лишь единиц. Какое наименьшее число единиц может содержать эта разность?

8. Докажите, что разность числа, имеющего нечётное количество цифр, и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, делится на 99.