13.1. ***а)*** *Клавдия Семёновна выращивает на подоконнике цветы. У неё есть синий, зелёный, коричневый и оранжевый горшки. Сколькими способами Клавдия Семёновна может расставить их в ряд на подоконнике?* ***б)*** *Синий горшок разбился, и Клавдия Семёновна купила вместо него ещё один оранжевый — точь-в-точь такой же, как у неё уже есть. Сколько способов расставить горшки теперь?*

Решение. **а)** Есть 4 способа выбрать цвет самого левого горшка, при каждом способе выбрать его — по 3 способа выбрать цвет следующего за ним горшка, далее — по 2 способа выбрать цвет третьего горшка, и, наконец, цвет последнего горшка определяется однозначно. Итого $4\cdot3\cdot2\cdot1 = 4! =$ **24 способа**. **б)** Если различать новый и старый оранжевые горшки, то способов расстановки будет столько же, сколько в пункте а). Эти способы разбиваются на пары, где в каждой паре расстановки отличаются только перестановкой двух оранжевых горшков. Значит, если перестать различать оранжевые горшки, то каждая из этих пар расстановок превратится в одну расстановку. Тем самым расстановок станет вдвое меньше, то есть $24 : 2 =$ **12**.

13.2. *Сколько способов нанизать 15 различных бусинок на спицу? Способы, отличающиеся переворотом спицы, считаем различными.*

Решение. Будем нанизывать бусинки на спицу по очереди. Первой можно нанизать любую из 15 бусинок, после этого второй — любую из оставшихся 14, после этого третьей — любую из оставшихся 13, ..., пятнадцатой — только одну оставшуюся в самом конце. Итого способов нанизать 15 бусинок на спицу будет $15\cdot14\cdot\ldots\cdot2\cdot1 =$ **15!**.

13.3. ***а)*** *Сколькими способами можно расставить 8 одинаковых ладей на шахматной доске 8×8, чтобы они не били друг друга?* ***б)*** *А если все ладьи разные?*

Решение. **а)** В каждой вертикали и в каждой горизонтали должна стоять ровно одна ладья. Выбрать клетку для ладьи в первой горизонтали можно 8 способами, во второй — 7 (она не должна стоять в одной вертикали с ладьёй из первой горизонтали), в третьей — 6, и т. д. Всего $8\cdot7\cdot6\cdot\ldots\cdot1 =$ **8! = 40 320 способов**.

б) Для каждого из 8! способов расстановки ладей из пункта а) у нас есть ещё по 8! способов эти ладьи пронумеровать. Поэтому будет **8!·8! = 1 625 702 400 способов**.

13.4. *Сколькими способами можно усадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы люди одного пола не сидели рядом?*

Решение. Нам важно только то, как гости рассажены относительно друг друга. Зафиксируем место для одного из мужчин, а остальных гостей рассадим относительно него. Тогда по часовой стрелке от него надо посадить: Ж М Ж М Ж М Ж М Ж (чтобы никакие двое мужчин и никакие две женщины не сидели рядом). Теперь надо рассадить четырёх оставшихся мужчин по 4 местам (для этого есть 4! = 24 способа по аналогии с задачей 13.2) и 5 женщин по 5 местам (для этого есть 5! = 120 способов). Сделать и то, и другое одновременно можно $4!\cdot5! =$ **2880 способами**.

13.5. *Анагра́ммой называется «слово» (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова перестановкой букв. Сколько анаграмм можно составить из слов:* ***а)*** *МАЛЫЙ;* ***б)*** *МЕХМАТ;* ***в)*** *ХОРОШО;* ***г)*** *РАБОТАЕТ?*

Решение. **а) 120** анаграмм (аналогично предыдущим задачам). **б)** От предыдущего пункта отличие в том, что в слове МЕХМАТ две одинаковые буквы М. Если их различать (например, назвать $М_1$ и $М_2$), то по аналогии с пунктом а) анаграмм будет 6! = 720. Но эти анаграммы разбиваются на пары, где в каждой паре анаграммы отличаются только перестановкой букв $М_1$ и $М_2$. Значит, если перестать различать эти две буквы, каждая пара превратится в одну анаграмму, и анаграмм станет вдвое меньше, то есть $720 : 2 =$ **360**. **в)** В слове ХОРОШО уже три одинаковые буквы. Если их различать, то анаграмм будет 720. Эти анаграммы разбиваются на группы, где в каждой группе анаграммы отличаются только перестановкой букв О. И в каждой группе таких анаграмм 3! = 6 (число способов переставить три различные буквы на заданных трёх местах). Значит, если эти буквы перестать различать, каждая группа превратится в одну анаграмму, и анаграмм станет в 6 раз меньше, то есть $720 : 6 =$ **120**. **г)** В слове РАБОТАЕТ две буквы А и две буквы Т. Рассуждая аналогично двум предыдущим пунктам, получим, что анаграмм у этого слова $8! : (2! \cdot 2!) =$ **10 080**.

13.6. *Сколько есть различных способов составить из 15 различных бусинок браслет, если одинаковые браслеты — это те, которые отличаются друг от друга:* ***а)*** *поворотом;* ***б)*** *поворотом или переворотом?*

Решение. Из каждого браслета длиной 15 бусинок можно, разрезая его в разных местах и разгибая, получить 15 разных «спиц» из задачи 13.2. Поэтому в пункте а) браслетов в 15 раз меньше, чем спиц в задаче 13.2, то есть $15! : 15 = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot14 =$ **14!**. В пункте б), когда браслеты можно ещё и переворачивать, все браслеты из пункта а) разбиваются на пары, а браслеты в каждой паре переходят друг в друга при переворачивании. Таких пар вдвое меньше, чем браслетов в п. а), то есть **14! : 2.**

13.7. ***а)*** *Сколькими способами можно сделать из лент шести разных цветов трёхцветный горизонтальный флаг?* ***б)*** *А если на флаге обязательно должен быть красный цвет?* ***в)*** *А если цветов на флаге может быть меньше трёх, но рядом полосы одинаковых цветов стоять не должны? (Флаги, отличающиеся друг от друга переворотом, считаем разными.)*

Решение. **а)** Цвет верхней полосы можно выбрать шестью способами. При каждом способе такого выбора остаётся по пять способов выбрать цвет средней полосы (чтобы он не совпадал с цветом верхней полосы). Наконец, при каждом способе выбора цветов верхней и средней полос остаётся по четыре способа выбрать цвет для нижней полосы (чтобы он не совпадал с цветами первых двух полос). Итого получаем $6\cdot5\cdot4 =$ **120 способов**.

б) Сначала выберем, какая из трёх полос флага будет красной (это можно сделать тремя способами). После этого неокрашенными останутся ещё две полосы. Для той из них, которая расположена выше, есть пять способов выбрать цвет (можно использовать любой из имеющихся цветов, кроме красного). После этого для оставшейся полосы есть четыре способа выбрать цвет (любой, кроме красного и использованного для предыдущей полосы). Итого получаем $3\cdot5\cdot4 =$ **60 способов**.

в) Сначала посчитаем количество флагов, в которых используется строго меньше трёх цветов. Одноцветным такой флаг быть не может (иначе три одноцветные полосы шли бы подряд, а это запрещено условием). Значит, он может быть только двухцветным, причём верхняя и нижняя полоса должны быть покрашены в один и тот же цвет, а средняя — в другой. Покрасить верхнюю и нижнюю полосы можно шестью разными способами, после этого среднюю полосу можно покрасить (в другой цвет) пятью способами. Итого получаем $6 \cdot 5 = 30$ флагов, в которых используется строго меньше трёх цветов. А теперь к этому числу надо добавить число трёхцветных флагов из п. а). Итого получим $120 + 30$ **= 150 флагов.**

13.8. *Чтобы сохранить переговоры Больших Начальников в секрете, Самый Большой Начальник придумал новый язык: в нём 6 гласных и 8 согласных, причём двух одинаковых букв в слове быть не может, а гласные и согласные в слове непременно чередуются. Сколько слов из девяти букв может быть в этом языке?*

Решение. Все слова нового языка делятся на две группы: те, которые начинаются с гласной, и те, которые начинаются с согласной. В словах из первой группы 5 гласных и 4 согласных, а в словах второй группы — наоборот. Чтобы составить слово из первой группы, нужно выбрать 5 гласных и 4 согласных (порядок выбираемых гласных и выбираемых согласных важен!). Выбрать первую гласную можно 6 способами, вторую — 5, третью — 4, и т. д. Аналогично с согласными. Итого будет $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 720 \cdot 1680 = 1\,209\,600$ слов. Аналогично подсчитываем число слов из второй группы. Есть 360 способов упорядочить 4 гласных из 6 и 6720 способов — 5 согласных из 8. Итого $360 \cdot 6720 = 2\,419\,200$ способов. Осталось сложить два полученных результата. Всего в новом языке $1\,209\,600 + 2\,419\,200 =$ **3 628 800 слов**.

13.9. *У Пети есть 12 вагончиков разных цветов (некоторые, возможно, одного цвета, но неизвестно, сколько вагончиков какого цвета). Петя считает, что различных 12-вагонных поездов он сможет составить больше, чем 11-вагонных. Не ошибается ли Петя? (Поезда считаются одинаковыми, если в них на одних и тех же местах находятся вагончики одного и того же цвета.)*

Решение. Будем называть поезд из 11 вагончиков "поезд-11", а поезд из двенадцати вагончиков — "поезд-12". Рассмотрим два различных "поезда-12" и отцепим от них последние вагончики. Если эти вагончики у них одинаковые, то, отцепив их, мы получим различные "поезда-11" (так как "поезда-12" были различными, а отцеплены одинаковые вагончики). Если же последние вагончики были различными, то на каком-то месте в этих поездах также должны находиться различные вагончики, так как все поезда составлены из одного и того же набора вагончиков (из всех вагончиков, которые есть у Пети). Таким образом, все получившиеся "поезда-11" будут состоять из различных наборов вагончиков, то есть также будут различными. Следовательно, из различных "поездов-12" получаются различные "поезда-11", то есть "поездов-11" не меньше, чем "поездов-12". Значит, **Петя ошибается**.

Замечание. На самом деле "поездов-11" ровно столько же, сколько и "поездов-12". Если рассмотреть два различных "поезда-11", то после добавления к ним последнего вагончика не могут получиться одинаковые "поезда-12", так как среди первых 11 вагончиков есть отличия. Поэтому из различных "поездов-11" получаются различные "поезда-12", то есть "поездов-12" не меньше, чем "поездов-11". В итоге мы установили взаимно однозначное соответствие между двумя множествами: различных "поездов-12" и различных "поездов-11".