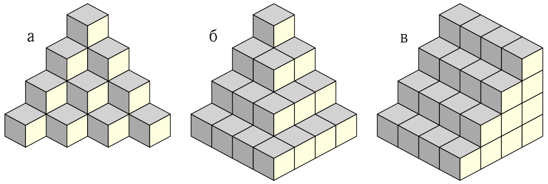
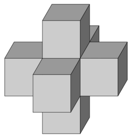
МММФ-6 **12. Кубы и кубики. Ответы и решения** **22.02.2025**

12.1. *Сколько кубиков в каждой из пирамидок на рисунке справа?*



Решение. **а)** 1 + 3 + 6 + 10 = **20**; **б)** 1 + 4 + 9 + 16 = **30**; **в)** 4 + 8 + 12 + 16 = **40**.



12.2. ***а)*** *К каждой грани кубика 1×1×1 приклеили ещё по одному кубику 1×1×1. Получился «ёж» (см. рисунок слева). Из скольких квадратиков состоит его поверхность?*

б) *К каждой грани на поверхности «ежа» из пункта а) приклеили кубик. Назовём полученную фигуру «толстым ежом». Из скольких кубиков состоит «толстый ёж»? Из скольких квадратиков состоит его поверхность?*

Решение. **а)** Все грани исходного кубика оказались заклеены новыми кубиками и снаружи не видны. Каждый новый кубик добавляет по 5 квадратиков к поверхности «ежа» (это все его грани, кроме той одной, которая приклеена к исходному кубику). Приклеенных кубиков 6, значит, они в сумме дают 6·5 = **30** квадратиков.

б) Исходный «ёж» состоит из 7 кубиков. У каждого из «внешних» кубиков есть грань, противоположная приклеенной к центральному кубику; к каждой из этих граней в «толстом еже» приклеивается ещё по одному кубику, и все эти 6 новых кубиков разные (назовём их *новыми кубиками первого типа*). К каждой из остальных четырёх граней «внешних» кубиков «ежа» приклеивается ещё по одному кубику, но каждый из этих новых кубиков (назовём их *новыми кубиками второго типа*) приклеивается одновременно к двум старым. Значит, таких новых кубиков ещё 6·4:2 = 12. Итого к 7 старым кубикам добавляется ещё 18 новых, и получается 25 кубиков. Все грани кубиков «ежа» в «толстом еже» оказываются заклеены новыми кубиками, и вклада в его поверхность не дают. При это каждый новый кубик первого типа добавляет к поверхности «толстого ежа» 5 квадратиков, а каждый новый кубик второго типа — 4 квадратика. Итого поверхность «толстого ежа» состоит из 6·5 + 12·4 = **78** квадратиков. Можно решать эту задачу и при помощи «поэтажного плана» «ежей».

12.3. *Два куба 3×3×3 имеют ровно два общих кубика.*

а) *Из скольких кубиков состоит такая фигура?*

б) *Из скольких квадратиков состоит поверхность такой фигуры?*

Решение. **а)** 27 + 27 – 2 = **52 кубика** (складывая количества кубиков в каждом кубе, мы посчитаем два общих кубика дважды, поэтому их затем нужно один раз вычесть); **б)** 54 + 54 – 5 – 5 = **98 квадратиков** (два соседних общих кубика оказываются целиком скрыты внутри фигуры, поэтому их внешние грани, коих три у углового кубика и два у не углового, вычитаются из площади поверхности каждого из кубов).

12.4. *Планета «Куб» имеет форму куба, каждой гранью которого правит либо правдивый, либо лживый король. Однажды каждый король заявил, что правители большинства сопредельных с его владениями граней лживы. Сколько было лживых королей на самом деле?*

Ответ: четыре лживых короля и два правдивых.

Решение. У каждого правителя — четыре соседа. Большинство из них — это либо все четыре, либо трое. Далее рассуждаем по пунктам.

1. Ясно, что все короли лживыми быть не могут, иначе их заявления — чистая правда. Значит, есть хотя бы один правдивый король. Назовём его П.

2. Король П сказал правду, поэтому с ним граничат не менее трёх лживых. Среди этих трёх удобно взять центрального — назовём его Л: у него уже два лживых соседа (те же, что у П) и один правдивый (сам П).

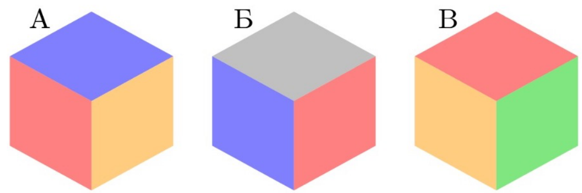
3. Чтобы заявление короля Л было ложью, его четвёртый сосед (на грани, противоположной П), должен быть правдивым. Итак, на двух противоположных гранях — правдивые короли, а на трёх из остальных — лживые. Кто же на последней грани?

4. С этим некто граничат два лжеца и два правдивца. Значит, он солгал, говоря о большинстве.

12.5. *На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй раз — 15. Что написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?*

Решение. Сумма всех очков на кубике равна 1 + . . . + 6 = 21. Значит, сумма чисел на верхней и на нижних гранях после первого броска равна 21−12 = 9, а после второго 21−15 = 6. Представим эти числа в виде суммы двух различных чисел, написанных на кубике: 9 = 6 + 3 = 5 + 4, 6 = 5 + 1 = 4 + 2. Как разобраться, какая именно пара чисел была сверху и снизу? Воспользуемся тем, что эти пары не имеют общих чисел. Значит, комбинация 4 + 5 отпадает (в обоих представлениях шестёрки есть либо 4, либо 5). Поэтому напротив шестёрки — **тройка**.

12.6. *На рисунках А, Б, В справа изображён один и тот же куб. Грань какого цвета расположена напротив красной?*



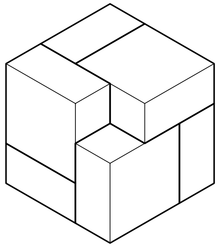
Решение. Из рис. А и Б следует, что красных или синих граней минимум две, а из рис. А и В — что красных или оранжевых граней минимум две. Поскольку используются все пять цветов, красная грань должна встречаться ровно два раза. Из рис. А и Б следует, что обе красные грани граничат с синей (на этих рисунках, очевидно, видны разные красные грани), значит, на рис. А вторая красная грань или сзади-слева, или сзади-справа. Из рис. В следует, что одна из красных граней граничит также с оранжевой, поэтому на рис. А вторая красная грань может быть только напротив видимой красной грани.

12.7. ***а)*** *Какое наименьшее число прямолинейных разрезов нужно сделать, чтобы разрезать куб 3×3×3 на маленькие кубики 1×1×1? После каждого разреза полученные части можно перекладывать как угодно.* ***б)*** *Тот же вопрос для куба 4×4×4.*

Решение. **а) 6 разрезов:** по два параллельно каждой грани куба (тут и перекладывать ничего не надо). Обойтись меньшим числом разрезов нельзя: чтобы получился центральный кубик 1×1×1, нужно «создать» ему 6 граней с помощью разрезов, а создать одним прямолинейным разрезом сразу несколько его граней невозможно.

б) Тоже **6 разрезов**. А вот здесь надо перекладывать: режем куб пополам, потом два получившихся бруска 4×4×2 кладём рядом в виде бруска 8×4×2 и делаем разрез перпендикулярно самому короткому ребру. Затем снова складываем исходный куб из полученных частей и проделываем аналогичные разрезы по двум другим направлениям. Минимальность доказывается аналогично пункту а.

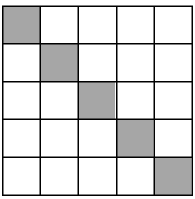
12.8. *Какое наибольшее число брусков 1×2×2 можно уместить в кубе 3×3×3 без пересечений?*



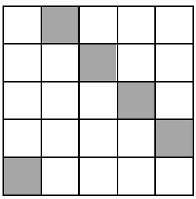
Решение. Можно уместить 6 штук. Больше не получается по соображениям объёма: куб состоит из 3·3·3 = 27 кубиков 1×1×1, а брусок — из 1·2·2 = 4 кубиков, поэтому всего брусков поместится не больше, чем 27 : 4. Пример изображён на рисунке справа («смотрящий» на нас кубик 1×1×1 не занят бруском).

12.9. *Есть много единичных кубиков, причём некоторые из них прозрачные, а некоторые нет. Из них требуется сложить куб 5×5×5. Сколько непрозрачных кубиков следует взять и как их расположить, чтобы при взгляде на куб со стороны любой из его граней куб казался непрозрачным?*

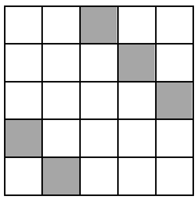
Решение. Ясно, что требуется не менее 25 кубиков, чтобы они при взгляде с любой стороны перекрывали квадрат 5×5. Пример расположения 25 кубиков изображён на рисунке ниже. Важно, что в каждой вертикали и горизонтали каждого яруса, а также в каждом «столбике» из 5 одинаково расположенных клеток всех ярусов непрозрачным является ровно один кубик.



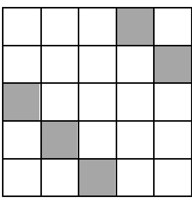
Первый ярус



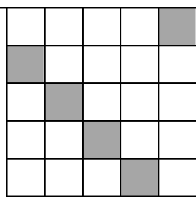
Второй ярус



Третий ярус



Четвёртый ярус



Пятый ярус