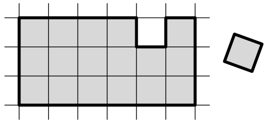
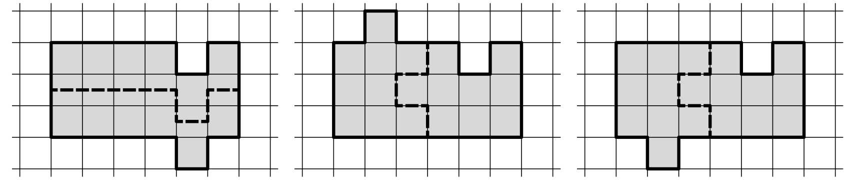
ММФ-6 **11. Праздник к нам приходит!** **15.02.2025**

Ответы и решения

11.1. *Из прямоугольника 3 × 6 вырезали одну клетку (см. рис.). «Пришейте» эту клетку в другом месте так, чтобы получилась фигура, которую можно разрезать на две одинаковых.*



Ответ. Несколько примеров пришивания и разрезания см. на рисунках.



11.2. На доске написаны две суммы. Какая из них больше?

1 + 22 + 333 + 4444 + 55555 + 666666 + 7777777 + 88888888 + 999999999

9 + 98 + 987 + 9876 + 98765 + 987654 + 9876543 + 98765432 + 987654321

Ответ. Суммы равны.

Решение. Запишем обе суммы столбиком, причём вторую для большей наглядности в обратном порядке. В обеих суммах в разряде единиц будут складываться цифры от 1 до 9, в разряде десятков — цифры от 2 до 9, в разряде сотен — цифры от 3 до 9 и так далее. И цифра, получающаяся в каждом разряде, и перенос в старший разряд окажутся в обоих случаях одинаковыми. Поэтому и результат сложения будет один и тот же. Обе суммы, конечно, можно непосредственно вычислить, получается 1097393685. Но это достаточно трудоёмкий и неинтересный путь.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4} \\ 1 \\ 22 \\ 333 \\ 4444 \\ +\quad 55555 \\ 666666 \\ 7777777 \\ 88888888 \\ 999999999 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 4} \\ 987654321 \\ 98765432 \\ 9876543 \\ 987654 \\ +\quad 98765 \\ 9876 \\ 987 \\ 98 \\ 9 \\ \hline 5 \end{array}$$

Комментарий. Можно представить себе, как цифры во втором примере «падают вниз», и второй пример превращается в первый.

11.3. *Вася 10 дней решал задачи — каждый день хотя бы одну. Каждый день (кроме первого), если погода была пасмурная, то он решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а если солнечная — на одну меньше. За первые 9 дней Вася решил 13 задач. Какая погода была на 10-й день?*

Ответ. Пасмурная. ***Решение.*** Рассмотрим любые два дня, идущие подряд. Каждый день решено хотя бы по одной задаче, но ровно по одной оба дня быть не может, значит, за эти два дня решено минимум три задачи. Таким образом, за первые 8 дней Вася решил как минимум $4 \cdot 3 = 12$ задач. Если бы он за девятый день решил хотя бы две задачи, число решённых за 9 дней задач превысило бы 13. Так что за 9-й день была решена ровно одна задача. На 10-й день погода была пасмурной (и Вася решил две задачи), в противном случае он бы решил в этот день 0 задач, а по условию это не так.

Можно привести пример, как такое могло быть: Вася за эти 10 дней последовательно решал 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 задачи. Нетрудно доказать, что этот пример единственен. В самом деле, доказательство, что Вася решил за 9-й день ровно одну задачу, применимо к любому нечётному дню.

Комментарий. Казалось бы, ответ на вопрос можно было бы дать, вообще не учитывая ни сколько было дней, ни сколько всего решено задач. Действительно, пасмурная погода в последний день ничему противоречить не может, а солнечная может, причём ровно в том случае, когда в предпоследний день решена ровно одна задача. А раз нас просят определить погоду в последний день, то ответ «пасмурная». Тем не менее, такое рассуждение не может считаться решением, так как исходит из неявного предположения, что на задачу можно дать однозначный ответ.

11.4. *Из клетчатого прямоугольника периметром 50 клеток по границам клеток вырезана прямоугольная дырка периметром 32 клетки (дырка не касается границы). Если разрезать эту фигуру по всем горизонтальным линиям сетки, получится 20 полосок шириной в 1 клетку. А сколько полосок получится, если вместо этого разрезать её по всем вертикальным линиям сетки? (Квадратик 1 × 1 — это тоже полоска!)*

Решение. Для каждой горизонтальной полоски отметим её левую и правую стороны, а для каждой вертикальной — верхнюю и нижнюю. Ясно, что мы по одному разу отметили все границы клеток на контуре прямоугольника и контуре дырки, т. е. 50 + 32 = 82 границы. Каждая полоска давала нам по две границы, так что всего полосок 82 : 2 = 41. Горизонтальных среди них 20, значит, вертикальных 21.

11.5. *В сумме П,Я + Т,Ь + Д,Р + О,Б + Е,Й все цифры зашифрованы буквами (разными буквами — разные цифры). Оказалось, что все пять слагаемых не целые, но сама сумма является целым числом. Каким оно могло быть?*

Ответ. 27 (пример 0,5 + 1,6 + 7,4 + 8,3 + 9,2 = 27) и 18 (пример 0,9 + 1,8 + 3,7 + 5,4 + 6,2 = 18).

Решение. Сумма Я+Ь+Р+Б+Й должна оканчиваться нулём. Сумму 10 получить можно, только если взять пять наименьших цифр (0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10), но такой пример не получится составить, так как ноль не может стоять после запятой (тогда дробь будет целым числом вопреки условию). Максимальная сумма пяти цифр 9+8+7+6+5=35, так что получить можно только суммы 20 и

30. Заметим, что все буквы различны, то есть все десять цифр участвуют в записи по одному разу. Общая сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому если сумма цифр после запятой равна 20, то при суммировании после запятой мы получим 0, а в предыдущий разряд перенесем 2. Эта 2 добавится к сумме цифр до запятой, которая равна 45 − 20 = 25, и мы находим ответ 27. Аналогично, если сумма цифр после запятой равна 30, то ответ будет равен 45 − 30 + 3 = 18.

Комментарий. Примеров в этой задаче очень много – есть 86400 способов получить сумму 27 и 72000 способов получить сумму 18.

11.6. *В школе все ученики — отличники, хорошисты либо троечники. В круг встали 99 учеников. У каждого среди трёх соседей слева есть хотя бы один троечник, среди пяти соседей справа — хотя бы один отличник, а среди четырёх соседей — двух слева и двух справа — хотя бы один хорошист. Может ли в этом круге быть поровну отличников и троечников?*

Ответ. Не может. ***Решение.*** Заметим, что первые два условия можно проще сформулировать так: среди любых трёх стоящих подряд есть троечник, среди любых пяти стоящих подряд есть отличник. Кроме того, рядом с каждым хорошистом или через одного человека от него должен стоять другой хорошист (назовем таких двух хорошистов друзьями). Если два друга-хорошиста стоят рядом, то с обеих сторон от них должны стоять троечники, а если через одного, то троечник стоит между ними. Поэтому, если у какого-то хорошиста есть два друга, то возникает одна из двух пятёрок — 34434 или 43434, в которых нет отличника, что невозможно. Таким образом, хорошисты распадаются на пары друзей, и поэтому хорошистов чётное число. А тогда отличников и троечников вместе — нечётное, значит, их не поровну.

11.7. *На витрине ювелирного магазина лежат 15 бриллиантов. Рядом с ними стоят таблички: 1, 2, ..., 15 карат. У продавца есть чашечные весы и четыре гирьки массами 1, 2, 4 и 8 карат. Покупатель может положить один из бриллиантов на одну чашу весов, а гирьки — на другую и убедиться, что масса бриллианта на табличке указана верно. За каждую взятую гирьку нужно заплатить продавцу 100 монет. Если гирька снимается с весов и в следующем взвешивании не участвует, продавец забирает её. Какую наименьшую сумму придётся заплатить, чтобы проверить массы всех бриллиантов?*

Оценка. Переходя к каждому взвешиванию, мы либо покупаем одну или несколько гирек, либо отдаём их продавцу. Поэтому мы в сумме купили и отдали $N > 15$ гирек. При этом после последнего взвешивания у нас на руках есть хотя бы одна гирька, так что мы купили больше, чем отдали. Это значит, что мы купили более половины от N, т. е. как минимум 8 гирек, а значит, заплатили жадному продавцу **не менее 800 монет**.

Оценка (другой способ). Представим себе, что плата за каждую гирьку разделена на две части: 50 монет покупатель платит, когда берёт гирьку, а ещё 50 — когда отдаёт. Если считать, что в конце все гирьки возвращаются продавцу, то при таком способе расчёта суммарная плата не изменится.

Пример.

Какие гири покупаем	Что взвешиваем	Сколько монет мы заплатили
1	$1=\mathbf{1}$	100
2	$1+2=\mathbf{3},\ 2=\mathbf{2}$	200
4	$2+4=\mathbf{6}$	300
1	$1+2+4=\mathbf{7},\ 1+4=\mathbf{5},\ 4=\mathbf{4}$	400
8	$4+8=\mathbf{12}$	500
1	$1+4+8=\mathbf{13}$	600
2	$1+2+4+8=\mathbf{15},\ 2+4+8=\mathbf{14},\ 2+8=\mathbf{10}$	700
1	$1+2+8=\mathbf{11},\ 1+8=\mathbf{9},\ 8=\mathbf{8}$	800