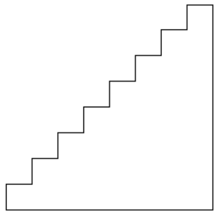
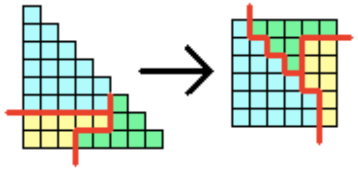
9. Сможешь или нет?
Ответы и решения

9.1. *Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков во всех кучках было различным (и ненулевым)?*



Решение. Нельзя. Если бы это было возможно, то в первой кучке был бы минимум один шарик, во второй — минимум два, в третьей — минимум три, …, в девятой — минимум 9. Но $1+2+3+\ldots+9=45>44$.

9.2. *На рисунке справа показана лестница. Можно ли разрезать её:*
а) *на две части и сложить из них прямоугольник;*
б) *на три части и сложить из них квадрат?*



Решение. **а)** Отрезаем сверху четыре «ступеньки» (10 клеток), переворачиваем и прикладываем слева — получается прямоугольник 4×9. **б)** См. рисунок справа.

9.3. *Существуют ли два последовательных целых числа:*
а) *у каждого из которых сумма цифр делится на 4;*
б) *у которых одинаковая сумма цифр?*

Решение. **а)** Да, например, 39 и 40. **б)** Нет. Известно, что число даёт такой же остаток при делении на 3, что и сумма его цифр. У двух последовательных чисел остатки при делении на 3 разные, значит, и у сумм их цифр тоже разные. Поэтому они не могут быть равны.

9.4. *Числитель и знаменатель положительной дроби увеличили на 10. Могла ли дробь при этом уменьшиться?*

Решение. Могла. Например, $5/2=2{,}5 > 15/12 = 1{,}25$.

9.5. *Можно ли в примере на сложение заменить одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными так, чтобы получилось ОДИН + ОДИН + ПЯТЬ = СЕМЬ?*

Решение. Нельзя: в этом выражении используются 11 различных букв, а цифр у нас всего 10.

9.6. *Можно ли раскрасить клетки доски 5×5 в два цвета — чёрный и белый — так, чтобы у каждой белой клетки были ровно три соседние по стороне чёрные клетки, а у каждой чёрной клетки — ровно две соседние по стороне белые?*

Решение. Нельзя. Если такая раскраска возможна, то угловые клетки должны быть чёрными (у них нет трёх соседних клеток), а соседние с ними — белыми; все соседние с этими белыми клетками должны быть чёрными. Из оставшихся 5 клеток все, кроме центральной, могут быть только белыми (им уже не набрать по два белых соседа), а тогда у центральной клетки будет 4 белых соседа.

9.7. *Про 25 чисел известно, что сумма любых четырёх из них положительна. Может ли сумма всех 25 чисел быть отрицательна?*

Решение. Очевидно, что отрицательных чисел среди этих 25 — не более трёх (иначе сумма четырёх отрицательных была бы отрицательной). Взяв любую четвёрку, содержащую все отрицательные числа (её сумма по условию положительна) и прибавив все остальные числа (все они неотрицательные) получим, что общая сумма также положительна.

9.8. *Можно ли разложить 99 орехов на 10 кучек так, чтобы любые кучки отличались, но не более чем в три раза?*

Решение. Можно. Например, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14 и 15 орехов (пример единственный!).

9.9. *На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11 000 км дорог. Сможет ли правительство страны соединить сетью дорог все свои города?*

Решение. Построим 5 горизонтальных дорог длиной 1000 км так, чтобы верхняя и нижняя отстояли от верхней и нижней границы государства на 100 км, а между соседними дорогами было расстояние 200 км. Ещё построим вертикальную дорогу. Уже построено $5\cdot1000 + 800 = 5800$ км дорог. Теперь достаточно соединить каждый из них с построенными дорогами. Расстояние от любого города до ближайшей горизонтальной дороги не больше 100 км. Значит, их суммарная длина не превосходит $51\cdot100 + 5800 = 10\,900 < 11000$, так что страна справится.

9.10. *В клетках клетчатого прямоугольника 3×5 лежат 15 разных монет. Они образуют восемь рядов: три горизонтальных и пять вертикальных. Известно, что семь рядов имеют одну и ту же массу, а восьмой — другую. Можно ли определить этот ряд с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь?*

Решение. Можно. Если все три горизонтальных ряда имеют одинаковую массу m, то масса всех монет $3m$. Тогда масса четырёх одинаковых вертикальных рядов $4m$, что уже больше $3m$. Противоречие. Значит, одинаковую массу (пусть она равна m) имеют пять вертикальных рядов и два горизонтальных. Третий горизонтальный ряд весит $5m - 2m = 3m$, то есть тяжелее обычного. Для его нахождения надо сравнить массы двух горизонтальных рядов.