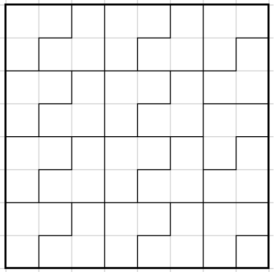
8.1. *Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?*



Решение. *Оценка:* $64 = 3\cdot21 + 1$, поэтому больше чем на **21** трёхклеточный уголок на доске не хватит клеток.
Пример: см. рисунок справа (есть и много других примеров). Идея этого в том, чтобы разрезать доску на 10 прямоугольников 2×3 и один квадрат 2×2, после чего каждый прямоугольник порезать на два трёхклеточных уголка и ещё один уголок вырезать из квадрата.

8.2. *Найдите наименьшее натуральное число n такое, что n! делится на 18, на 19, на 20 и на 21. Напомним, что* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Решение. Заметим, что число 19 простое, поэтому если $n < 19$, то $n!$ не делится на 19. Осталось заметить, что **19!** делится на 18, на 19, на 20 ($20 = 5\cdot4$) и на 21 ($21 = 7\cdot3$).

8.3. *Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 нужно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка:*
а) *в любом квадратике 2×2;* ***б)*** *в любом уголке из трёх клеточек?*

Решение. **а) 16; б) 32.** Разобьём квадрат на 16 квадратиков 2×2. В пункте а) в каждом из них должна быть хотя бы одна закрашенная клетка, в пункте б) — хотя бы две (иначе в этом квадратике поместится незакрашенный уголок).

8.4. *На старт «Весёлого забега» на 3000 м выходит команда из трёх математиков. Им выдается одноместный самокат. Дорожка прямая, стартуют все одновременно, а в зачёт идет время последнего пришедшего на финиш. Какое минимально возможное время прохождения дистанции, если бегают они все со скоростью 125 м/мин, а на самокате ездят со скоростью 250 м/мин?*

Решение. *Пример.* Первый едет треть пути на самокате, бросает его, бежит дальше пешком. Второй бежит треть пути, хватает валяющийся самокат, берёт его, едет треть пути, бросает, бежит дальше пешком. Третий бежит две трети пути, хватает самокат и финиширует одновременно с товарищами по команде. В итоге каждый треть пути едет и две трети бежит, таким образом, через **20 минут** все финишируют.
Оценка. Очевидно, что возвращаться назад, чтобы передать транспортное средство, невыгодно. Поэтому на самокате будут двигаться только вперёд. Если кто-то проедет на самокате менее трети дистанции, то он потратит на весь забег более 20 минут. Значит, всем нужно проехать ровно треть.

8.5. ***а)*** *В магазине приходится взвешивать на весах товары массой в целое число килограммов — от 1 кг до 15 кг. Какое наименьшее число гирь должно быть для этого в магазине, если гири кладутся на одну чашку весов, а продукты на другую?* ***б)*** *А какое наименьшее число гирь должно быть в магазине, где взвешивать нужно товары целой массой от 1 до 40 кг, но гири можно класть на обе чашки весов?*

Решение. **а) 4 гири.** *Пример:* нетрудно убедиться, что подходят гири 1, 2, 4, 8. *Оценка:* имея n гирь различного веса, можно отвесить по указанным правилам $2^n - 1$ различных весов (используя или не используя каждую гирю; не использовать ни одной гири нельзя). При $n < 4$ получается менее 15 различных весов.

б) 4 гири. *Пример:* подходят гири 1, 3, 9, 27. Проверить это можно так: с помощью гирь 1 и 3 делаются веса от 1 до 4, прибавляя/вычитая их к/из 9, получим ещё все веса от 5 до 13, прибавляя/вычитая ранее полученные веса к/из 27, получим все веса от 14 до 40. *Оценка:* докажем, что трёх гирь не хватит. Пусть массы гирь $a<b<c$. Тогда с помощью двух более лёгких гирь можно получить 4 веса a, b, $a + b$, $b - a$; затем, прибавляя/вычитая эти веса к/из веса c, получим ещё 9 весов; итого не более 13 различных весов (часть из них могут совпадать).

8.6. *Перед Малышом и Карлсоном стоит семь коробочек с конфетами: в первой — одна конфета, во второй — две, …, в седьмой — семь. Они договорились есть конфеты по очереди. За раз можно взять одну конфету из любой коробочки, первую конфету ест Карлсон. Если кто-то съедает последнюю конфету коробочки, то забирает пустую коробочку себе. Какое наибольшее количество коробочек сможет получить Малыш, как бы ни старался Карлсон ему помешать?*

Решение. *Оценка:* Карлсон может сразу опустошить первую коробочку, поэтому больше **6 коробочек** Малыш получить не может.

Пример-стратегия: назовём коробочки *чётными* или *нечётными* в зависимости от чётности количества конфет в них. В начале есть четыре нечётные коробочки. Малыш может действовать следующим образом. Если Карлсон берёт конфету из чётной коробочки, то Малыш берёт конфету из той же коробочки, оставляя её снова чётной. Если Карлсон берёт конфету из нечётной коробочки, то Малыш берёт конфету из другой нечётной коробочки. В результате две нечётные коробочки становятся чётными. Рано или поздно все четыре нечётные коробочки станут чётными, причем только в одной из них (в которой изначально была одна конфета) в момент смены чётности конфет не будет. Остальные шесть коробочек достанутся Малышу, который сделает в них последний ход.

8.7. *Несколько камней весят вместе 10 т, при этом каждый из них весит не более 1 т. Какого наименьшего количества грузовиков грузоподъёмностью по 3 т хватит, чтобы увезти этот груз за один раз?*

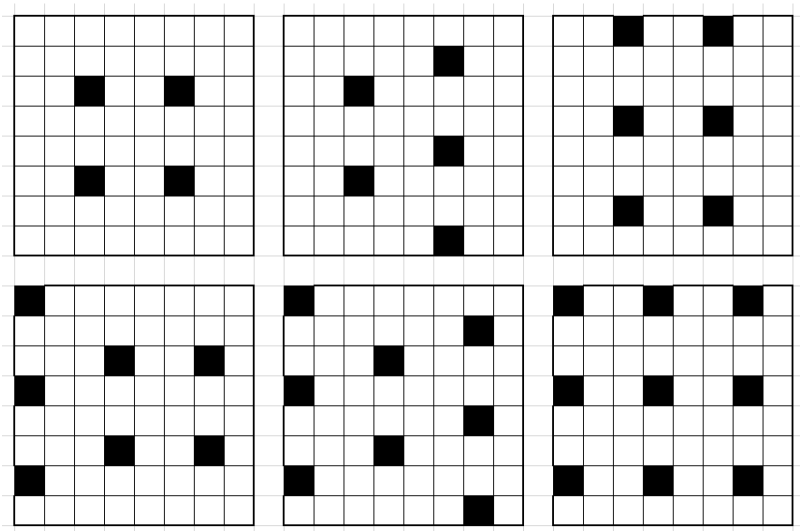
Решение. Покажем, что **на пяти грузовиках** можно увезти весь груз за один раз. Действительно, на каждой из четырёх первых трёхтонок можно увезти более 2 т камней, т.е. первые четыре машины увезут по крайней мере 8 т камней. Оставшиеся камни (суммарным весом менее 2 т) увезёт пятая машина. Покажем теперь, что четырёх машин может не хватить. Действительно, если бы изначально было 13 камней весом по 10/13 т каждый, то одна трёхтонка могла бы увезти только 3 таких камня, т.е. четыре трёхтонки могут увезти лишь 12 из 13 камней.

8.8. *Какое количество клеток можно отметить на доске 8×8 так, чтобы в каждом квадрате 3×3 была ровно одна отмеченная клетка? Найдите:* ***а)*** *минимально возможное количество;* ***б)*** *максимально возможное количество;* ***в)*** *все возможные варианты.*

Решение. **Минимум 4, максимум — 9, все промежуточные варианты тоже возможны** (см. примеры на рисунке внизу).

Оценка снизу: в каждом из четырёх квадратов 3×3, примыкающих к углам доски, должна быть ровно одна отмеченная клетка, а общих клеток у этих четырёх квадратов нет, поэтому меньше четырёх клеток не хватит.

Оценка сверху: покроем доску 8×8 девятью квадратами 3×3 (с наложением). В каждом из этих квадратов должна быть ровно одна отмеченная клетка, поэтому более 9 клеток отметить не удастся.



8.9. *В примере на сложение одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, разные — разными. В результате получилась запись СТУК + СТУК + ... + СТУК = АААААА. Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой записи?*

Решение. *Оценка.* Сумма 10 или менее 4-значных чисел будет не более чем пятизначной (самое большое значение такой суммы 9999 · 10 = 99990 – пятизначное число). Число АААААА не меньше, чем 111111, при этом 111111 : 11 = 10101, поэтому 11-ю слагаемыми обойтись тоже не удастся. Кроме того, 111111 — нечётное число, поэтому его можно получить только как сумму нечётного количества одинаковых слагаемых, а значит, этих слагаемых минимум **13**. Если же взять большее число вида АААААА (то есть минимум 222222), его не удастся получить как сумму 12 или меньшего числа равных 4-значных чисел, поскольку 9999 · 12 = 119988 < 222222.

Пример. 111111 = 13 · 8547.