ММФ-6 **23.11.2024**

7. Комбинаторика. Начало.

Ответы и решения

7.1. *В магазине игрушек есть три медведя, семеро козлят и тридцать восемь попугаев, все разные. Сколькими способами покупатель может выбрать:* ***а)*** *одну игрушку;* ***б)*** *по одной игрушке каждого из трёх видов;* ***в)*** *две игрушки разных видов?*

Решение. **а)** В магазине всего $3 + 7 + 38 = 48$ игрушек, выбрать одну можно **48 способами**.

б) Три игрушки — это уже комбинация, выбор делаем поэтапно. Выберем сначала медведя одним из 3 способов. Затем козлёнка одним из 7 способов и наконец попугая одним из 38 способов, то есть выбрать по одной игрушке каждого вида можно $3 \cdot 7 \cdot 38 =$ **798 способами**.

в) Пары могут быть трёх видов: «медведь + козлёнок», «медведь + попугай» и «попугай + козлёнок». Рассуждая аналогично предыдущему пункту, находим количество пар «медведь + козлёнок»: $3 \cdot 7 = 21$. Точно также и с другими парами. Всего пар $3 \cdot 7 + 3 \cdot 38 + 7 \cdot 38 =$ **401**.

7.2. *В классе учатся 5 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно выбрать:* ***а)*** *пару учеников одинакового пола;* ***б)*** *пару учеников, где хотя бы один мальчик;* ***в)*** *четырёх учеников, среди которых мальчиков и девочек поровну?*

Решение. **а)** Множество возможных пар одинакового пола разбивается на взаимоисключающие подмножества пар девочек (их $10\cdot9:2 = 45$) и пар мальчиков (их $5\cdot4:2 = 10$). Количество элементов в множестве складывается из соответствующих количеств элементов в подмножествах, поэтому всего будет $45 + 10 =$ **55 пар**.

б) Число всех пар учеников равно $(10 + 5) \cdot (10 + 5 – 1) : 2 = 105$. Из этих пар нам не подходит 45 пар девочек. Значит, всего пар с мальчиком $105 – 45 =$ **60**.

Можно и по-другому: сложить число пар мальчиков с числом пар мальчик-девочка (их $5 \cdot 10 = 50$).

в) Требуемая четвёрка учеников составляется из двух частей: пары мальчиков и пары девочек. Строим четвёрку в два этапа: сначала выбираем любую пару девочек из 45, затем к каждой паре можем добавить любую из 10 пар мальчиков, тем самым всего получаем $45 \cdot 10 =$ **450 четвёрок**.

7.3. *Сколькими способами можно вырезать из клетчатой доски 8×10 прямоугольник из 4 клеток?*

Решение. Прямоугольник из 4 клеток может иметь размеры 1×4, 2×2 или 4×1. Найдём по отдельности количество способов вырезать прямоугольник каждого из этих видов, а результаты сложим. В каждой из 8 строк прямоугольник 1×4 может быть расположен 7 способами (так как для его самой левой клетке есть 7 мест) итого $8 \cdot 7 = 56$. Для левой верхней клетки квадрата 2×2 есть $7 \cdot 9 = 63$ места. В каждом из 10 столбцов верхняя клетка прямоугольника 4×1 может быть расположена 5 способами, всего таких прямоугольников $10 \cdot 5 = 50$. Всего имеется $56 + 63 + 50 =$ **169** способов вырезать прямоугольник из 4 клеток.

7.4. *Сколькими способами можно разместить на шахматной доске пару одинаковых королей:* ***а)*** *бьющих друг друга;* ***б)*** *не бьющих друг друга? Короли бьют друг друга, если стоят на соседних по стороне или вершине клетках.*

Решение. **а)** *<u>Первый способ.</u>*

Короли могут пить друг друга по горизонтали, вертикали или диагонали. В первом случае левой король может быть на любой клетке, кроме восьми клеток правого края, а место правого определится однозначно; итого 56 пар. Аналогично 56 пар во втором случае. Третий случай разобьём на два подслучая: нижний король стоит справа или слева от верхнего. Если справа, то он может быть в любой клетке, кроме клеток верхней горизонтали и левой вертикали. Такие клетки образуют квадрат 7×7. Значит, положений для нижнего короля и нужных пар 49. Аналогично для подслучая, когда нижней король слева от верхнего. Всего будет $2 \cdot 56 + 2 \cdot 49 =$ **210 пар**.

<u>Второй способ.</u>

Разделим все клетки на 3 группы.

1) Есть 4 угловые клетки, с которых король бьёт по 3 клетки, всего есть $4 \cdot 3 = 12$ пар бьющих королей с участием угловых.
2) С 24 крайних (без угловых) король бьёт по 5 клеток, с участием крайних есть $24 \cdot 5 = 120$ пар (некоторые сосчитаны дважды).
3) Есть 36 центральных клеток, с них король бьёт по 8 клеток, итого $36 \cdot 8 = 288$ пар.

Всего $12 + 120 + 288 = 420$ пар бьющих друг друга королей, но каждая пара сосчитана дважды. Значит, на самом деле пар $420 : 2 =$ **210**.

б) Выбрать пару мест для королей на 64 клетках доски можно $64 \cdot 63 : 2 = 2016$ способами. Из них в 210 случаях короли бьют друг друга, а в остальных $2016 – 210 =$ **1806** случаях — не бьют.

7.5. *Леночка нарисовала зелёную ёлочку, украшенную шестью шариками. Каждый шарик она может раскрасить одним из четырёх цветов: красным, жёлтым, синим или оранжевым. Сколькими способами Леночка может раскрасить шарики, чтобы:* ***а)*** *хотя бы один из них был жёлтым?* ***б)*** *среди шариков был хотя бы один жёлтый и хотя бы один красный?*

Решение. **а)** Всего есть 4^6 способов раскрасить шарики (Леночка шесть раз выбирает один из четырёх цветов). Если ни одного жёлтого шарика нет, то используется лишь три оставшихся цвета. Поэтому без жёлтого шарика есть 3^6 способов раскраски, остальные $4^6 – 3^6$ содержат хотя бы один жёлтый шарик. **б)** Без жёлтого шарика 3^6 способов, без красного тоже 3^6. Но если сложить $3^6 + 3^6$, то способы, в которых нет ни жёлтого, ни красного шарика, окажутся посчитаны дважды. Чтобы и они были просчитаны однократно, их количество надо вычесть из суммы $3^6 + 3^6$. Какие это способы? Такие, в которых каждый из шести шариков либо синий, либо оранжевый. Цветов осталось только два, поэтому способов 2^6. Итак «плохих» способов раскраски, не содержащих желтого или красного шарика, $3^6 + 3^6 – 2^6$. Остальные $4^6 – 3^6 – 3^6 + 2^6 =$ **2702** «хорошие», содержат и жёлтый, и красный шарики.

7.6. *Кузнечик прыгает по числовому лучу вправо прыжками длины 2 или 5, при этом у него есть силы совершить не более трёх прыжков длины 5. Сколькими способами он может попасть с 1 на 33?*

Решение. Кузнечик должен сдвинуться на 32. Маршрут кузнечика определяется количеством прыжков длины 5 и их расположением. По условию их 0, 1, 2 или 3.

Если их нет вообще, то сдвинуться прыжками длины 2 надо на 32, таких прыжков 16, это один способ.

Если прыжок длинной 5 один, то сдвинуться прыжками длины 2 надо на $32 – 5 = 27$, что невозможно, так как 27 – нечётное число.

Если прыжков длины 5 два, то сдвинуться двойными прыжками надо на $32 – 10 = 22$, таких прыжков 11, а всего прыжков 13. Маршрут определяется тем, какие номера у прыжков длины 5. Выбрать пару из 13 номеров можно $13 \cdot 12 : 2 = 78$ способами.

Если прыжков длины 5 три, то сдвинуться прыжками длины 2 надо на $32 – 15 = 17$, что невозможно, так как 17 – чётное число.

Итак, попасть с 1 на 33 кузнечик может $1 + 78 =$ **79 способами**.

7.7. *Художник написал четыре пейзажа, пять натюрмортов и два портрета. Сколькими способами можно выбрать несколько его картин для выставки так, чтобы среди них нашлись пейзаж, натюрморт и портрет?*

Решение. Разделим процесс выбора на три этапа: сначала разберёмся с пейзажами, затем с натюрмортами, а затем с портретами. Каждый пейзаж можно брать или не брать, поэтому способов выбора пейзажей $2^4 = 16$. Вариант «не брать ни одного пейзажа» надо исключить, останется 15 способов. Аналогично имеется $2^5 - 1 = 31$ способ выбрать натюрморты и $2^2 - 1 = 3$ способа – портреты. Всего $(2^4 - 1)(2^5 - 1)(2^2 - 1) = 15 \cdot 31 \cdot 3 =$ **1395 способов** выбрать картины.

7.8. *На доске выписаны по возрастанию все двузначные числа. Вовочка хочет стереть два или более подряд идущих чисел, но чтобы число 77 на доске осталось. Сколькими способами Вовочка может осуществить задуманное?*

Решение. Такие способы задаются парами двузначных чисел, где либо оба числа меньше 77, либо оба больше 77. Всего таких пар $67 \cdot 66 : 2 + 22 \cdot 21 : 2 =$ **2442**.

7.9. ***а)*** *Есть одна карточка с цифрой 5, две карточки с цифрой 3 и сто карточек с цифрой 2. Сколькими способами можно составить из них десятизначное число, у которого произведение цифр оканчивается на 0?* ***б)*** *Все такие числа выписали подряд по возрастанию. Какое число стоит на 455-м месте?*

Решение. **а)** Среди выбранных наверняка окажутся карточки с двойкой, поэтому произведение цифр чётное. Оно оканчивается на 0 тогда и только тогда, когда карточка с пятёркой тоже попала в число выбранных. Карточек с тройкой может быть 0, 1 или 2.

1) Троек нет. Пятёрка может быть на любом из 10 мест, остальные заняты двойками. Таких чисел 10.
2) Тройка одна. Тогда пятёрка может стоять на любом из 10 мест, тройка на любом из 9 оставшихся мест. Таких чисел $10 \cdot 9 = 90$.
3) Троек две. Сначала выбираем одно из 10 возможных мест для пятёрки, затем пару мест из 9 оставшихся для троек. Второе можно сделать $9 \cdot 8 : 2 = 36$ способами, а всего чисел с одной пятёркой и двумя тройками $10 \cdot 36 = 360$.

Сложив числа из трёх групп, получим $10 + 90 + 360 =$ **460 чисел**.

б) Место 455 близко к концу, то есть там стоит одно из самых больших чисел. Такие числа начинаются на 53. Их девять: 532…2, 532…23, …, 5332…2. Число 455 — шестое с конца, в нём вторая тройка стоит на шестом с конца месте. Значит, искомое число это **5 322 222 322.**

7.10. *Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8×8 тридцать одну шашку так, чтобы никакие две не стояли в клетках с общей стороной?*

Решение. Разобьем доску на 16 квадратиков 2×2. Ясно, что один из квадратиков «особый» — в нём только одна шашка, а в остальных пятнадцати — по две шашки, причём в противоположных углах. Итак, в неособом квадратике либо обе шашки стоят на белых, либо обе — на чёрных клетках. Но тогда и в соседнем (по стороне) квадратике шашки стоят на клетках того же цвета. Тем самым это распространяется на все неособые квадратики, то есть вне особого квадратика все шашки стоят на клетках одного цвета: либо все стоят на чёрных, либо все на белых клетках. заведомо можно в особом квадратике поставить шашку на любую из клеток того же цвета. этого мы получаем 64 вариантов: отмечаем любую клетку и занимаем шашками все клетки того же цвета, кроме отмеченной.

Но есть ещё случаи, когда шашка в особом квадрате ставится на клетку противоположного цвета. Пусть для определенности в неособых квадратах заняты белые клетки. Если особый квадрат граничит с тремя или четырьмя не особыми, то каждая черная клетка в нём граничит с занятой белой и шашку на чёрную клетку поставить нельзя. Рассмотрим особые квадраты в углах доски. Если угловая клетка белая, то с чёрными клетками возникает та же проблема. Но в тех углах, где угловая клетка чёрная, она не граничит с неособыми квадратами, и туда всё-таки можно поставить шашку. Итого, кроме 64 «одноцветных», есть ещё 4 «разноцветные» расстановки; по одной для каждого угла. А всего их $64 + 4 =$ **68**.

7.11. *Окна трёхэтажного дома обращены к морю, на каждом этаже по три окна, все окна одинаковы, окна на разных этажах расположены ровно друг под другом. Агент 007 подаёт сигнал кораблю в море, освещая некоторые окна. К сожалению, в темноте не видно самого дома, а видна только картинка зажжённых окон (например, если горят только левое и правое окна на одном этаже, можно понять, что они не соседние, но нельзя понять, на каком они этаже). Сколько разных сигналов можно подать?*

Решение. Можно считать, что окна образуют таблицу 3 × 3, освещённое окно – это раскрашенная клетка и наблюдатель на корабле видит только картинку из раскрашенных клеток, не видя линий таблицы. Значит, картинки, которые можно получить друг из друга сдвигами вправо-влево и вверх-вниз, неразличимы. Поэтому любую картинку можно, сдвинув влево до упора и вверх до упора, заменить картинкой, где есть закрашенные клетки в левом столбце и в верхней строке. Разберём два случая.

1) Закрашена клетка в левом верхнем углу. Каждая из 8 остальных клеток может быть окрашена или нет, значит, есть $2^8 = 256$ вариантов сигнала.
2) Левая верхняя клетка не окрашена. Тогда окрашены хотя бы одна из двух оставшихся клеток верхней строки ($2^2 - 1 = 3$ варианта) и хотя бы одна из двух оставшихся клеток левого столбца (тоже 3 варианта). Для оставшихся 4 клеток есть 24 = 16 вариантов раскраски, а всего в случае 2 есть $3 \cdot 3 \cdot 16 = 144$ варианта.

Значит всего агент 007 может подать $256 + 144 =$ **400 различных сигналов**.