

5.1. *Внутренние покои дворца султана Ибрагима ибн Сауда состоят из ста одинаковых квадратных комнат, расположенных в виде квадрата 10×10 . Если у двух комнат есть общая стена, то в ней обязательно есть ровно одна дверь. А если стена внешняя, то в ней обязательно есть ровно одно окно. Сколько окон и дверей в покоях Ибрагима ибн Сауда?*

Ответ: 40 окон, 180 дверей.

Решение. Поскольку во дворце султана 4 наружных стены, по длине каждой из которых располагаются 10 комнат, и 18 внутренних перегородок (9 продольных и 9 поперечных), каждая также длиной 10 комнат, можно определить число окон ($10 \times 4 = 40$) и дверей ($10 \times 18 = 180$).

5.2. *Есть три одинаковых кирпича и линейка. Как без вычислений узнать длину главной диагонали кирпича? (Главная диагональ — та, которая соединяет две противоположные вершины кирпича. Она лежит внутри кирпича и снаружи не видна. Ломать кирпичи нельзя.)*

Решение. Положить кирпичи «уголком» и измерить расстояние между двумя вершинами крайних кирпичей.

5.3. *Студенты кафедры высшей геометрии и топологии, находясь летом на отдыхе, разрезали арбуз на четыре части и съели. Могло ли после этого остаться пять корок?*

Решение. Если постараться, из арбуза можно вырезать кусок в виде столбика, идущего сквозь весь арбуз. У этого куска будут две корки, соединенные арбузной мякотью.

5.4. *Ковёр-самолёт летает только тогда, когда имеет прямоугольную форму. У Ивана-царевича был ковёр-самолёт размером 9×12 . Как-то раз Змей Горыныч подкрался и отрезал от этого ковра маленький коврик размером 1×8 . Иван-царевич очень расстроился и хотел было отрезать еще кусочек 1×4 , чтобы получился прямоугольник 8×12 . Но Василиса Премудрая предложила поступить по-другому. Она разрешила ковёр на три части, из которых волшебными нитками сшила квадратный ковёр-самолёт размером 10×10 . Сможете ли Вы догадаться, как Василиса Премудрая переделала испорченный ковёр?*

Решение. После того как Змей Горыныч испортил ковер, Иван-царевич мог отрезать от этого ковра кусочек размером 1×4 и превратить его в ковер размером 8×12 . Это значит, что после ухода Змея Горыныча ковер выглядел так, как показано на рис. 1. Василиса Премудрая разрешила этот ковер так, как показано на рис. 2, и сшила так, как показано на рис. 3.

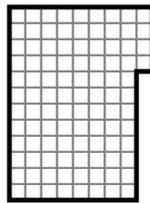


Рис 1

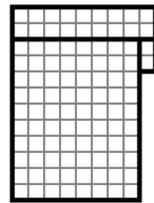


Рис 2

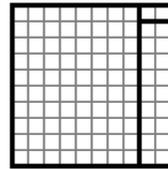
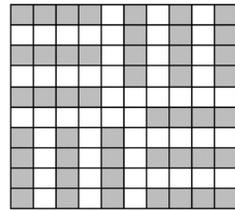


Рис 3

5.5. *Можно ли в квадрате 10×10 расставить 12 кораблей 1×4 (для игры типа «морского боя») так, чтобы корабли не соприкасались друг с другом (даже вершинами)?*

Ответ: можно (см. рисунок справа).

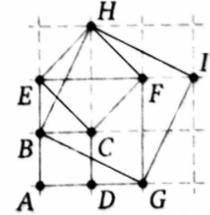


5.6. а) *На листе бумаги нарисовали три попарно различных квадрата. Все вершины этих квадратов отметили. Могло ли оказаться, что отмечено меньше девяти точек?*

б) *На листе бумаги нарисовали четыре попарно различных квадрата. Все вершины этих квадратов отметили. Могло ли оказаться, что отмечено меньше десяти точек?*

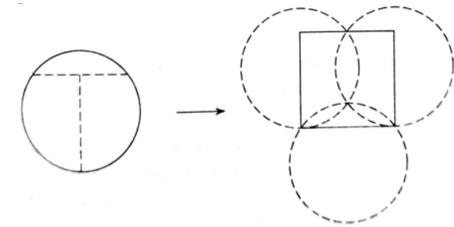
Ответ: да в обоих пунктах.

Решение. На рисунке изображено четыре квадрата: $ABCD$, $AEFG$, $CEHF$, $GBHI$. Вершинами трёх первых квадратов являются восемь точек, а всех четырёх — девять точек.



5.7. *Придумайте три фигуры, из которых можно сложить как круг, так и квадрат (фигуры могут перекрываться, но и круг, и квадрат должны быть без дыр).*

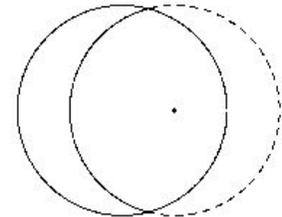
Решение. Разрежем круг на три части, как показано на рисунке (вертикальный отрезок лежит на диаметре и равен перпендикулярной ему хорде), — это будут искомые фигуры. Докажем, что из этих частей можно сложить квадрат.



Действительно, если рассмотреть хорду, симметричную проведённой относительно центра круга, то две нижние части при сложении пересекутся в концах этой хорды. При этом в силу симметрии данная точка будет удалена от нижней стороны квадрата на расстояние, равное высоте верхнего сегмента, поэтому все три части пересекутся в одной точке.

5.8. *В круге отметили точку. Разрежьте круг: а) на три; б) на две части так, чтобы из них можно было составить новый круг с отмеченной точкой в центре.*

Решение. а) Нужно вырезать из круга два маленьких равных кружка — один с центром в центре круга, а другой с центром в отмеченной точке, и затем поменять эти кружки местами.



б) Линия разреза — дуга того же радиуса, что и у данного круга, с центром в отмеченной точке (см. рис.). Возможны и другие решения.

5.9. *На бумаге нарисован квадрат и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит точка P (если точка лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой).*

а) *Как за четыре вопроса узнать, лежит ли точка P внутри квадрата? б)* *Удастся ли это сделать за три вопроса?*

Решение. а) Пусть наш квадрат — $ABCD$. В случае четырёх вопросов достаточно естественной и очевидной последовательностью действий будет провести четыре прямые по сторонам квадрата (соответственно AB , BC , CD и AD), Человек в специальных очках (для краткости — "человек"), на каждом шаге, указывает одну из полуплоскостей или саму прямую. Тогда, после очередного шага,

- либо он укажет на полуплоскость, не содержащую квадрат (т.е. точка P лежит вне квадрата);
- либо на одном из шагов укажет на прямую и по результатам четырёх (или меньше, в зависимости от того на каком этапе будет указано на прямую) шагов нетрудно сделать вывод о том, лежит ли точка P на соответствующей стороне квадрата или на прямой вне квадрата;
- либо на каждом шаге будет указана полуплоскость, содержащая квадрат (т.е. точка P лежит внутри квадрата).

б) Удастся. На первом шаге проводим прямую AC . Человек указывает одну из полуплоскостей или саму прямую. Если он указывает полуплоскость, содержащую вершину B , то на втором и третьем шагах проводим прямые AB и CB . Те же прямые проводим и в том случае, если он указывает на саму прямую AC . Если на втором и третьем шагу человек указывает оба раза ту из полуплоскостей, в которой лежит треугольник ABC , то невидимая точка лежит строго внутри квадрата; если один раз он указывает на такую полуплоскость, а второй раз — на прямую или оба раза — на прямую, то точка лежит на границе квадрата. Если хотя бы один раз он укажет на полуплоскость, в которой нет треугольника ABC , то точка лежит вне квадрата. Случай, когда на первый вопрос человек укажет на полуплоскость, содержащую точку D , аналогичен.

Замечание. Если задано всего один или два вопроса, то проведено меньше трёх прямых (одна или две). Каковы бы ни были ответы, мы можем узнать только, принадлежит ли точка тем частям, на которые плоскость разбита проведёнными прямыми. Но эти части не ограничены, и принадлежность им не может быть доказательством того, что точка принадлежит квадрату.