ММФ-6 **4. Последняя цифра. Ответы и решения** **26.10.2024**

4.1. *Найдите последнюю цифру числа:* ***а)*** *2^{100};* ***б)*** *549^{49};* ***в)*** *2025^{2025}.*

Ответ: **а)** 6; **б)** 9; **в)** 5.

Решение. Последняя цифра произведения двух натуральных чисел равна последней цифре произведения их последних цифр. Поэтому при поиске последней цифры степени натурального числа можно, во-первых, сразу отбросить все цифры числа, кроме последней, а во-вторых, для нахождения последней цифры каждой следующей степени умножать последнюю цифру предыдущей степени этого числа на последнюю цифру самого числа. До какого-то момента последние цифры степеней числа будут разными (если только число оканчивалось не на 0, 1 или 5 – в этих случаях последняя цифра любой степени числа равна 0, 1 и 5 соответственно), а в какой-то момент значение последней цифры степени впервые повторится, и с этого момента процесс зациклится.

а) Для степеней двойки получится такая последовательность последних цифр: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, … То есть последние цифры степеней двойки меняются в цикле по 4 числа. Каждая степень двойки, показатель которой делится на 4 (в том числе и сотая), будет оканчиваться на 6.

б) Здесь цикл такой же, как для последней цифры степеней числа 9: 9, 1, 9, 1, … То есть все степени с нечётным показателем оканчиваются на 9, а с чётным — на 1.

в) При каждом умножении на 5 последняя цифра 5 сохраняется, поэтому все степени числа 2025 будут оканчиваться на 5.

4.2. *В книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{337} – 1$. Не опечатка ли это?*

Ответ: это опечатка.

Решение. Указанное число делится на 10, т.к. его последняя цифра 0, а значит, составное. (Число 23021^{337} оканчивается единицей, как и любая степень числа 23021.)

4.3. *Найдите последнюю цифру в произведении:*

а) *всех простых чисел, не превосходящих 100;*

б) *всех нечётных простых чисел, не превосходящих 100;*

в) *всех нечётных чисел от 1 до 2025.*

Ответ: **а) 0** (это произведение делится на 5 и на 2, а значит, и на 10). **б, в) 5** (эти произведения делятся на 5, но не делятся на 2).

4.4. *В магазин привезли 206 литров молока в бидонах по 10 и 17 литров. Сколько было бидонов каждого вида?*

Ответ: 7 бидонов по 10 литров и 8 бидонов по 17 литров.

Решение. Если бидонов одного вида было m, а другого — n, то $206 = 10{\cdot}m + 17{\cdot}n$. Число 206 в таком виде можно представить только одним способом: $206 = 10{\cdot}7+17{\cdot}8$. Чтобы это получить, нужно выяснить, на какое число надо умножить 17, чтобы последняя цифра произведения была равна 6 (поскольку у числа $10{\cdot}m$ последняя цифра точно 0). Это могут быть числа 8, 18, 28 и т.д. Но $18{\cdot}17 > 206$, так что годится только 8.

4.5. *Делится ли число $47^{30}+39^{50}$ на 10?*

Ответ: делится.

Решение. Число 47^{30} оканчивается на 9, а число 39^{50} — на 1 (это можно получить аналогично решению задачи 4.1). Значит, сумма этих чисел оканчивается на 0 и потому делится на 10.

4.6. *Можно ли придумать пример на деление с остатком, в котором делимое, делитель, неполное частное и остаток (в каком-нибудь порядке) оканчивались цифрами 9, 7, 3 и 1?*

Ответ: нельзя.

Решение. Предположим, что нам удалось придумать такой пример. Заметим, что делимое, делитель, неполное частное и остаток, оканчивающиеся такими цифрами, все будут нечётны. Тогда произведение неполного делителя и частного будет нечётным, а если к этому добавить остаток, сумма будет чётной. Но в то же время делимое должно быть нечётным — противоречие, поскольку

делимое = делитель · (неполное частное) + остаток.

4.7. ***а)*** *Докажите, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два числа, разность которых делится на 10.*

б) *Какое наименьшее количество натуральных чисел нужно взять наугад, чтобы сумма или разность каких-то двух из них делилась на 10?*

в) *Докажите, что среди квадратов любых пяти натуральных чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 10.*

Ответ: ***б)*** *7 чисел.*

Решение. **а)** Каждое из 11 чисел оканчивается на одну из 10 цифр, значит, среди них найдутся два числа, которые оканчиваются на одну и ту же цифру. Их разность будет делиться на 10. **б)** Во-первых, 6 чисел может не хватить: например, если они оканчиваются соответственно цифрами от 0 до 5, то ни сумма, ни разность никаких двух из них не делится на 10. Во-вторых, 7 чисел точно хватит. Действительно, все цифры можно сгруппировать так: 0 и 5 отдельно, а остальные цифры разбиваются на пары, дающие в сумме 10: 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6. Если последние цифры всех 7 чисел разные, то есть разность никаких двух из них не делится на 10, то последние цифры каких-то двух из них обязательно попадут в одну пару и в сумме дадут 10, тогда последняя цифра суммы будет 0. **в)** Квадрат любого натурального числа оканчивается на 0, 1, 4, 5, 6 или 9 (это достаточно проверить для чисел от 1 до 10). Если в наборе есть два квадрата, оканчивающихся, соответственно, на 1 и 9, на 4 и 6 или на две одинаковые цифры, условие выполнено. А среди любых пяти различных цифр из набора {0, 1, 4, 5, 6, 9} найдётся одна из указанных пар.

4.8. *На какую цифру может оканчиваться сумма нескольких первых натуральных чисел?*

Ответ: на 0, 1, 3, 5, 6, 8.

Решение. Легко проверить, что при добавлении в сумму десяти следующих чисел последняя цифра изменяется на 5. Поэтому достаточно проверить суммы не более 10 первых чисел. Можно дойти и до суммы первых 21 чисел и увидеть цикл.

4.9. *Вовочка перемножил несколько девяток. Может ли произведение тоже оканчиваться несколькими девятками?*
Ответ: нет, не может.

Решение. Найдём последнюю пару цифр первых нескольких степеней девятки (для этого достаточно каждый раз умножать на 9 двузначное число, образованное последними двумя цифрами очередной степени девятки, и отбрасывать все цифры, кроме двух последних): 09 – 81 – 29 – 61 – 49 – 41 – 69 – 21 – 89 – 01 – 09 и далее по циклу. Больше одной девятки на конце нигде нет.

4.10. *Найдите последнюю цифру числа* 7^{7^7}. *(Степени вычисляются «сверху вниз»:* $7^{7^7} = 7^{(7^7)}$.*)*
Ответ: 3.

Решение. Последние две цифры числа 7^7 образуют число 43 (это можно вычислить непосредственно, отбрасывая при каждом умножении все цифры результата, кроме последних двух). Значит, число 7^7 делится на 4 с остатком 3. Степени семёрки, в зависимости от остатка от деления показателя степени на 4, могут оканчиваться на 7, 9, 3 или 1. В нашем случае последняя цифра будет равна 3.

4.11. *Сколькими нулями оканчивается число*

$$2024! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2022\cdot 2023\cdot 2024?$$

Ответ: 503.

Решение. В каждой сотне подряд идущих натуральных чисел есть 20 чисел, кратных 5. Кроме того, из этих чисел 4 числа кратны 25. Итого от каждой сотни вклад в произведение 5^{24}. Поэтому 2024! делится на 5^{480}. А еще есть числа 2005, 2010, 2015, 2020, которые не вошли в 20 полных сотен. Кроме того, дополнительный вклад дают 16 чисел, кратных 125, а также числа 625, 1250 и 1875, кратные 625. Итого получим, что 2024! делится на 5^{503} (но уже не делится на 5^{504}). Значит, 2024! оканчивается 503 нулями: каждый ноль получается от умножения пятёрки на двойку, а двоек в разложении этого произведения на простые множители заведомо больше, чем пятёрок.

4.12. *На доске было написано число из нескольких семёрок: 777…77. Влад стёр у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стёртую цифру. С полученным числом он проделал ту же операцию, и так далее. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7.*

Решение. При каждой операции из числа $10x + y$ получается число $3x + y$. Разность этих чисел равна $7x$ и делится на 7. Значит, при каждом шаге делимость числа на 7 сохраняется, а само число уменьшается. Поскольку операцию можно проделывать с любым натуральным числом, в котором больше одной цифры, мы рано или поздно получим однозначное число, кратное 7.