3. Чётные и нечётные. Ответы и решения

3.1. ***а)*** *Перемножили несколько целых чисел, среди которых есть чётные. Чётным или нечётным будет их произведение?*
б) *Перемножили несколько нечётных чисел. Чётным или нечётным будет их произведение?* ***в)*** *Сложили несколько нечётных чисел. Чётной или нечётной будет их сумма?*

Решение. **а)** Чётным (это следует из свойства Ч × Н = Ч).

б) Нечётным (это следует из свойства Н × Н = Н).

в) Чётность суммы совпадает с чётностью количества слагаемых в ней (это следует из свойств Ч + Н = Н и Н + Н = Ч).

3.2. *Лера нарисовала на доске семь котиков. Потом в аудиторию пришли 33 школьника с Малого мехмата. Каждый из них или стёр одного котика, или дорисовал нового. Могло ли в конце остаться три котика?*

Решение. Каждый школьник меняет чётность количества котиков. Через 33 школьника чётность изменится по сравнению с первоначальной, так что 3 котика (или вообще любое нечётное число) получиться не может.

3.3. *Может ли сумма трёх целых чисел быть чётной, а произведение тех же трёх целых чисел — нечётным?*

Решение. Не может: если произведение нечётно, то и все множители нечётны, а тогда их сумма будет нечётной (ведь их три).

3.4. *Можно ли разменять 100 фертингов монетами по 1, 3, 5 и 25 фертингов так, чтобы всего оказалось 33 монеты?*

Решение. Нельзя: сумма 33 нечётных слагаемых нечётна.

3.5. *На окружности отметили 2025 точек, каждая из которых покрашена в один из двух цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, стоящие рядом.*
Решение. Если это не так, то точки двух цветов чередуются, и когда круг замкнётся, то рядом окажутся две одинаковые точки.

3.6. *На доске написано 1012 плюсов и 1013 минусов. За один ход разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс (если они одинаковы) или минус (если они различны). Какой знак останется на доске через 2024 хода?*
Решение. Количество минусов при любом действии либо не меняется, либо уменьшается на 2, и потому остаётся нечётным, а значит, никогда не станет равным нулю. Количество плюсов, наоборот, при любом действии увеличивается или уменьшается на 1 и меняет свою чётность. Поэтому в конце останется один минус.

3.7. *В каждой клетке таблицы 2025×2025 написано целое число. Оказалось, что сумма чисел в каждой строке нечётна. Докажите, что сумма чисел в каком-то столбце таблицы также нечётна.*
Решение. Строк нечётное число, и в каждой строке сумма чисел нечётна, поэтому и во всей таблице сумма чисел нечётна. Если бы сумма чисел в каждом столбце была чётной, то и сумма всех чисел в таблице была бы чётной.

3.8. *Можно ли целые числа от 1 до 2025 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе самое большое число равнялось сумме всех остальных чисел?*
Решение. Если такое разбиение существует, то в каждой группе сумма всех чисел чётна, а тогда и сумма всех чисел должна быть чётной. Но среди целых чисел от 1 до 2025 есть 1013 нечётных чисел (нечётное количество), поэтому сумма всех чисел будет нечётной. Поэтому искомого разбиения не существует.

3.9. *Гриша написал на доске 50 целых чисел. Яша заметил, что сумма любых 49 из них нечётна. Чётна или нет сумма всех чисел?*
Решение. Если вычесть из суммы первых 49 чисел сумму последних 49 чисел, то получим (чётную) разность первого и последнего числа; значит, эти числа одинаковой чётности. Так же доказывается, что любые два числа одинаковой чётности. Если сумма любых 49 из них нечётна, то каждое из них нечётно. Тогда сумма всех 50 чисел будет чётной.

3.10. *Книга состоит из 10 рассказов объёмом 1, 2, 3, …, 10 страниц соответственно. Первый рассказ начинается на первой странице книги, каждый следующий рассказ начинается с новой страницы (но неизвестно, в каком порядке идут рассказы). Какое наибольшее количество рассказов может начинаться с нечётной страницы?*
Решение. Если рассказ чётной длины, то чётность номера его первой страницы совпадает с чётностью первой страницы следующего рассказа, а если нечётной длины, то эти две чётности различны. То есть чётность номера первой страницы рассказа меняется 5 раз. Чтобы было больше рассказов, начинающихся с нечётной страницы, нужно, чтобы все рассказы чётной длины начинались с нечётной страницы, а последняя смена чётности произошла после последнего рассказа. Для этого можно расположить рассказы (по длинам) в таком порядке: 2 4 6 8 10 1 3 5 7 9, тогда первые страницы рассказов будут такими: 1 3 7 13 21 31 32 35 40 47, то есть с нечётной страницы будет начинаться 8 рассказов.

3.11. *В парламент прошли 99 представителей двух партий — «красные» и «синие». На первом заседании парламента каждый депутат сделал следующее заявление: «В парламенте представители моей партии составляют большинство». Известно, что каждый «красный» говорит правду, если до него выступает «синий», и обманывает, если до него выступает другой «красный». А каждый «синий», наоборот, говорит правду после другого «синего» и обманывает после «красного». К какой партии принадлежал первый выступавший, если он мог сказать правду или неправду на своё усмотрение?*

Ответ: к «красной».

Решение. Поскольку число 99 нечётно, представители какой-то партии составляют в парламенте большинство. Все они сказали правду. Допустим, это «синие». Тогда каждый из них (кроме, может быть, первого) выступал после однопартийца, то есть сначала выступили все «синие», а потом — все «красные». Однако тогда первый «красный» должен был сказать правду — противоречие. Значит, правду говорят «красные». Стало быть, они чередуются с «синими», и их больше. Но это возможно только в случае, когда первый оратор — «красный».