1.1. Выпишем первые несколько чисел, появляющихся на доске: 23 – 18 – 20 – 12 – 14 – 16 – 18 и далее по циклу (цикл по 5). Через час как раз будет заканчиваться 12-й цикл, и на доске будет написано **число 16**.

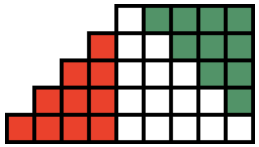
1.2. **а)** Чтобы число делилось на 10, оно должно оканчиваться на 0. Если число будет двузначным с нулём на конце, то его сумма цифр будет не больше 9. Значит, число должно быть по крайней мере трёхзначным. Наименьшим из трёхзначных чисел с указанными свойствами будет то, у которого в разряде сотен стоит единица. Чтобы сумма цифр этого числа была равна 10, в разряде десятков у него должно стоять 9. Получаем **число 190**.

б) Чтобы число делилось на 100, оно должно оканчиваться двумя нулями. Если число будет не более чем 13-значным с двумя нулями на конце, то (поскольку каждая цифра не больше 9) сумма его цифр будет не больше 99. Значит, число должно быть по крайней мере 14-значным. Из 14-значных чисел с указанными свойствами наименьшим числом будет то, у которого в старшем разряде единица. Тогда остальные его цифры (кроме двух нулей на конце) должны быть девятками, и это будет **число 19999999999900** (11 девяток).

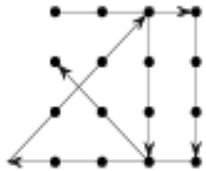
в) Чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться нулём или пятёркой. Если число не более чем трёхзначное и оканчивается нулём или пятёркой, то сумма его цифр не больше 5+9+9 = 23. Значит, число должно быть по крайней мере четырёхзначным. Среди четырёхзначных чисел с указанными свойствами наименьшим будет то, у которого в разряде тысяч стоит наименьшая цифра. Если там стоит единица, то сумма цифр числа не превосходит 1+9+9+5 = 24. Значит, там должна стоять хотя бы двойка. В последнем случае сумма цифр 25 достижима, только если это **число 2995**. Остальные числа с указанными свойствами будут больше найденного.

1.3. Ответ: 6 лампочек. Ни первый, ни второй выключатели не включают лампочки с номерами 3, 6 и 7, но эти лампочки включаются при включении второго и третьего выключателя; значит, их включает третий выключатель. Так как первый выключатель не включает ни одну из этих трёх лампочек, то первый и третий выключатели вместе включают шесть лампочек.

1.4. Число клеток в k-м ряду фигуры равно k-му нечётному числу. Значит, площадь такой фигуры из n рядов равна сумме первых n нечётных чисел. **а)** 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25. **б)** Десятое нечётное число — это число 19. Ну и 1 + 3 + 5 + ... + 19 = (1 + 19) · 10 : 2 = 100.



в) Заметим, что число клеток в такой фигуре всегда равно квадрату числа рядов. Это легче всего заметить геометрически (см. рисунок). В частности, если фигура состоит из 2024 рядов, то количество клеток в ней равно **2024^2 = 4 096 576**.



1.5. См. рисунок. Начинаем из левого верхнего угла и движемся по стрелкам. Возможны и другие решения!

1.6. **а)** Это можно сделать **за 9 ударов**. Например, так: (3, 3) → (4, 3) → (5, 3) → (6, 3) → (4, 4) → (2, 5) → (0, 6) → (0, 4) → (0, 2) → (0, 0) (Каждая пара чисел — это число голов и хвостов, оставшихся у Змея после очередного удара с учётом тех хвостов и голов, которые только что выросли.)

Могут быть и другие примеры, в том числе с бóльшим числом ударов.

б) Теперь докажем, что этого нельзя сделать быстрее, чем за 9 ударов.

Иван-Царевич может использовать удары трёх типов: A) отрубить два хвоста, вырастет одна голова; B) отрубить две головы; C) отрубить один хвост, вырастет два хвоста (по сути — просто добавить один хвост). Отрубать одну голову бесполезно, делать этого мы не будем.

1. Число ударов типа A должно быть нечётным. В самом деле, только при таких ударах меняется чётность числа голов. А чётность числа голов должна измениться: сначала их было 3, а в конце должно остаться 0. Если же таких ударов сделать чётное число, число голов останется нечётным (и значит, не будет равно нулю).

2. Так как только ударами типа A можно уменьшить число хвостов, одного такого удара не хватит. Поэтому таких ударов должно быть не меньше двух, а с учётом пункта 1 их должно быть хотя бы три.

3. После трёх ударов типа A вырастет три новых головы, и всего нужно будет отрубить 6 голов. Для этого потребуется хотя бы 3 удара типа B.

4. Чтобы отрубить 3 раза по два хвоста ударами типа A, нужно иметь 6 хвостов. Для этого нужно «вырастить» три дополнительных хвоста, сделав 3 удара типа C. Итак, нужно сделать не менее трёх ударов каждого из указанных типов; всего — не менее 9 ударов.