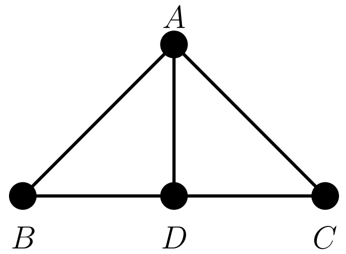
Олимпиада 2024/2025 учебного года

6 класс, устный тур 28.09.2024. Все задачи и решения

1. **Условие.** Сколькими способами можно нарисовать предложенную картинку, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну линию, если начинать рисовать нужно с одной из жирных точек?



Ответ. 12

Решение. Начинать рисовать нужно с вершины A или с точки D (а в другой из этих точек — заканчивать рисовать). В самом деле, из этих вершин выходит по 3 отрезка; чтобы их все нарисовать, нужно либо начать из этой точки, по одному из отрезков выйти из вершины, по другому войти и по третьему снова выйти, либо по одному из них войти в вершину, потом по другому выйти и по третьему ещё раз зайти (и там закончить). Если начинать с точки A, то идём либо $A-D-B-A-C-D$, либо $A-D-C-A-B-D$ (это если первым ходом идти вниз), либо $A-B-D-C-A-D$, либо $A-B-D-A-C-D$, либо $A-C-D-B-A-D$, либо $A-C-D-A-B-D$. Если начинать с точки D, есть ещё 6 аналогичных способов (просто меняем местами A и D в вышеописанных способах).

Комментарии. Важно, чтобы в решении была обоснована полнота перебора.

2. **Условие.** Из доски 8×8 вырезали угловую клетку. Какое минимальное количество ладей могут побить получившуюся доску? Ладья бьёт все клетки, находящиеся с ней на одной горизонтали или одной вертикали (включая и ту клетку, на которой стоит она сама).

Ответ. 7

Решение. Пример на 7 строится выставлением ладей по главной диагонали (содержащей вырезанную клетку), а оценка — через то, что нужно побить 7 целых вертикалей.

Комментарии. Только примера на 7, разумеется, недостаточно.

3. **Условие.** Болванщик и Мартовский Заяц играли в загадки — кто больше отгадает, тот и выиграет. По поводу их игры Алиса высказала следующие предположения.
1) Ничьей не будет.
2) Болванщик отгадает хотя бы одну загадку.
3) Болванщик выиграет.
4) Болванщик не проиграет.
5) Всего будет отгадано три загадки.
Из этих предположений только три оказались верными. Кто сколько загадок отгадал?

Ответ. Болванщик отгадал одну загадку, а Мартовский Заяц — две.

Решение. Рассмотрим 3 случая.
а) Если Болванщик выиграл, то 2, 3 и 4 верно. Но тогда 1 должно быть неверно, значит, была ничья. Противоречие.
б) Если была ничья, то 1 и 3 неверно. Но тогда 5 должно быть верно, и ничьей быть не могло. Противоречие.
в) Если Болванщик проиграл, то 3 и 4 неверно. Значит, 1, 2 и 5 верно. Значит, всего было

отгадано 3 загадки, Болванщик отгадал хотя бы одну, но проиграл. Значит, Болванщик отгадал одну загадку, а Мартовский Заяц — две.

Комментарии. Важно, чтобы в решении была обоснована полнота перебора.

4. **Условие.** На каждой грани куба записали некоторое число (см. рисунок 1). Затем к каждому числу прибавили сумму четырёх чисел, которые изначально были написаны на четырёх соседних гранях. Положение куба не поменяли, и с той же позиции он стал выглядеть так, как показано на рисунке 2. Какое число было записано на нижней грани изначально?

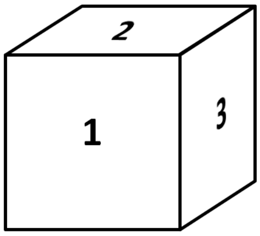


Рис. 1

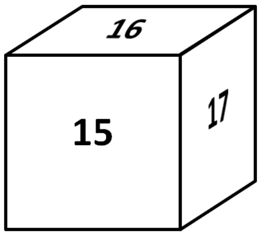


Рис. 2

Ответ. 5

Решение. Заметим, что в сумме $15+17$ два раза учтены числа написанные на передней грани (1), на правой грани (3), на верхней грани (2), на нижней грани (искомое число) и по одному разу учтены числа на левой грани и на задней грани. В числе 16 учтены все числа, кроме числа, написанного на нижней грани.

Рассмотрим число $15+17-16$. Здесь по одному разу учтены числа написанные на передней грани (1), на правой грани (3) и на верхней грани (2), а число, написанное на нижней грани (искомое число) учтено два раза.

Значит, на нижней грани написано число $\dfrac{15+17-16-1-2-3}{2}=5$.

Комментарии. Могут быть и другие способы решения, в том числе через систему уравнений.

5. **Условие.** Вовочка загадал натуральное число. Если бы он загадал число на 1 больше, то оно делилось бы на 5 и на 11, а если бы он загадал число на 1 меньше, то оно делилось бы на 3 и на 13.

а) Приведите два разных примера чисел, которые мог загадать Вовочка.

б) Докажите, что найдётся хотя бы 2024 таких числа.

Ответ. Например, 274 и 2419.

Решение. 274 подходит, дальше можно сколько угодно раз прибавлять по $55\cdot 39=2145$. Любое такое число тоже подойдёт: если $n-1$ делится на 55, то и $(n+2145)-1$ делится на 55, аналогично для $n+1$.

6. **Условие.** Катя написала на доске натуральное число. Потом пришёл Ваня и стёр какие-то три цифры (не обязательно подряд). На доске осталась запись 3 4 6 5 4 3. Катя помнит, что число делилось на 2, 3, 4, 5, 6, 9, но не делилось на 8.

а) Приведите пример числа, которое могла написать на доске Катя.

б) Сколькими способами Катя может восстановить написанное ею число?

Число не должно начинаться с нуля.

Ответ. а) например, 234654300. б) 19.

Решение. 1) Заметим, что достаточно проверить, что полученное число делится на 4, 5, 9, но не делится на 8.

Поскольку число делится на 5 и на 4, то на конце обязательно стоит 0.

Таким образом необходимо дописать ещё 2 цифры к записи 346543 так, чтобы полученное число делилось на 2 и 9, но не делилось на 4, а потом дописать 0 справа.

2) Пусть дописанные цифры — это a и b. По признаку делимости на 9 сумма $3+4+6+5+4+3+a+b=25+a+b$ должна делиться на 9. То есть $25+a+b$ может равняться 27 или 36, поскольку $a+b$ не превосходит 18. Значит, $a+b$ может равняться 2 или 11.

Теперь обратим внимание на то, что в случае, когда мы не дописываем справа никакую цифру, число не будет делиться на 2. Допишем справа цифру b, которая может равняться 0, 2, 4, 6 или 8. Тогда вторая цифра а определяется из равенств $a+b=2$ или $a+b=11$, для неё остаётся только выбрать место и проверить, чтобы число не делилось на 4.

Рассмотрим случаи.

$b=0$, тогда $a=2$. Количество способов поставить (не на последнее место) цифру 2 в запись 3465430 — 7 способов, минус 1 способ поставить 2 на предпоследнее место, поскольку тогда число будет делиться на 4. Итого 6 способов.

$b=2$, тогда $a=0$ или $a=9$.

Случай $a=0$. Если 0 не ставится на предпоследнее место, то на конце получаем ...32, а значит число делится на 4. Если 0 ставится на предпоследнее место, то число не делится на 4. Итого 1 способ.

Случай $a=9$. Если 9 не ставится на предпоследнее место, то на конце получаем ...32, а значит число делится на 4. Если 9 ставится на предпоследнее место, то то на конце получаем ...92 и число делится на 4. Итого 0 способов.

$b=4$, тогда $a=7$. Количество способов поставить (не на последнее место) цифру 7 в запись 3465434 — 7 способов.

$b=6$, тогда $a=5$. Если 5 не ставится на предпоследнее место, то на конце получаем ...36, а значит число делится на 4. Если 5 ставится на предпоследнее место, то то на конце получаем ...56 и число делится на 4. Итого 0 способов.

$b=8$, тогда $a=3$. Количество способов поставить (не на последнее место) цифру 2 в запись 3465438 — 5 способов (когда 3 дописывается до 3 и после 3, получается одно и то же число). Суммарно $6+1+0+7+0+5=19$ способов.