

Для любого целого числа  $a$  и любого натурального числа  $b$  существует единственная пара целых чисел  $q$  и  $r$  таких, что  $a = bq + r$  и  $0 \leq r < b$ . Число  $q$  называется *неполным частным*, а число  $r$  — *остатком* при делении числа  $a$  на число  $b$ .

Ясно, что  $a : b$  тогда и только тогда, когда остаток при делении числа  $a$  на число  $b$  равен нулю.

Сумма двух целых чисел даёт такой же остаток при делении на  $n$ , как и сумма их остатков. Произведение двух целых чисел даёт такой же остаток при делении на  $n$ , как и произведение их остатков.

0. (На разбор) Найдите остаток от деления числа  $2021 \cdot 2022 + 2023^2$  на 5.

1. а) Найдите последнюю цифру числа  $9^{100}$ .

б) Найдите остаток от деления числа  $9^{100}$  на 8.

в) Найдите остаток от деления числа  $9^{100}$  на 7.

2. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в неполном частном получится то же самое число, что и в остатке.

3. Начнём считать пальцы на правой руке: 1 — мизинец, 2 — безымянный, 3 — средний, 4 — указательный, 5 — большой, 6 — указательный, 7 — средний, 8 — безымянный, 9 — мизинец, 10 — безымянный и т. д. Какой палец при таком подсчёте получит номер 2023?

4. а) Докажите, что среди любых шести разных целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

б) Останется ли это утверждение верным, если вместо разности взять сумму?

5. Дано 64 числа: 1, 11, 21, 31, ..., 601, 611, 621, 631 (каждое следующее больше предыдущего на 10). Можно ли расположить все эти числа в разных клетках шахматной доски так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних по стороне клетках

а) делилась на 4?

б) не делилась на 4?

## Дополнительные задачи

6. Найдите последнюю цифру числа

а)  $7^7$ .

б)  $7^{7^7} (= 7^{(7^7)})$ .

в)  $7^{7^{7^7}} (= 7^{(7^{(7^7)})})$ .

7. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт остаток 3, при делении на 6 даёт остаток 5, при делении на 8 даёт остаток 1, а при делении на 9 даёт остаток 2.

8. Вовочка записал на доске два трёхзначных числа, которые получаются друг из друга перестановкой цифр в обратном порядке, перемножил их и получил число, заканчивающееся на два нуля. Какое число мог получить Вовочка?

а) Приведите пример такого числа.

б) Перечислите все возможные варианты.