

Фигуры называются **равными**, если после вырезания их можно наложить одну на другую, а именно: если одну из них можно сдвинуть, повернуть и (если понадобится) перевернуть так, чтобы они полностью совпали.

5.0 а. Разрежьте фигуру на две равные части.



Решение:

В условии не сказано про то, как надо резать, поэтому можно резать и не по линиям сетки.

Ответ:



б. Разрежьте квадрат 5×5 на две равные части. Можно ли разрезать так, чтобы линия шла по сторонам клеток?

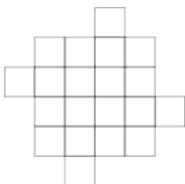
Решение:

Нельзя разрезать, так как площадь такого квадрата равна $5 \times 5 = 25$ клеток, а если фигуры равны, то их площади равны. Но 25 не делится на 2 без остатка.

Ответ:

Нет.

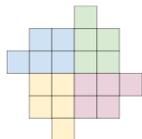
в. Разделите фигуру на 4 равные части.



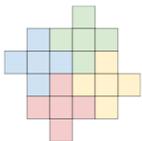
Решение:

Здесь используем несколько разных приемов разрезания, которые часто используются: симметрия относительно прямой (оси симметрии) или точки (центра симметрии), складывание фигур елочкой (стопочкой),

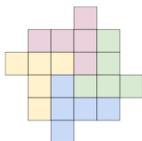
1-й способ (симметрия). Заметим, что фигура симметрична относительно центра, тогда разобьем ее на 4 такие симметричные относительно центра фигуры.



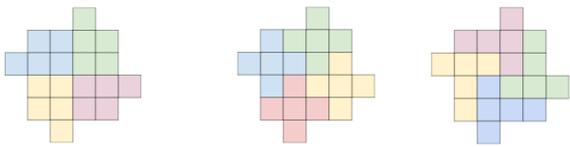
2-й способ (разрезание «стопочкой»). Детали как бы сложены одна в другую без смены ориентации.



3-й способ (разрезание «вентилятором»). Детальки и разрез как бы закручиваются вокруг центра, как лопасти вентилятора.

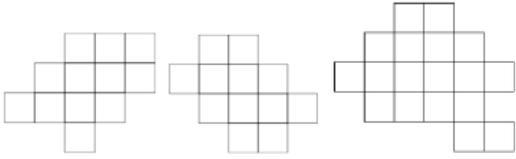


Ответ:



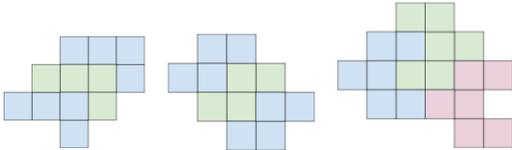
5.1 Разрежьте фигуры:

а. На 3 равные части.

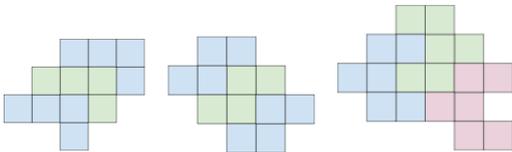


Решение:

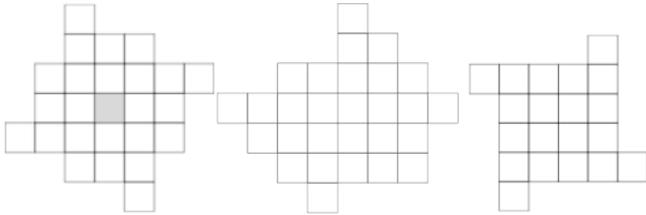
Складываем елочкой или вкладываем детали друг в друга.



Ответ:



б. На 4 равные части (приведите два разных способа для каждого случая; серая клетка - вырезанная).

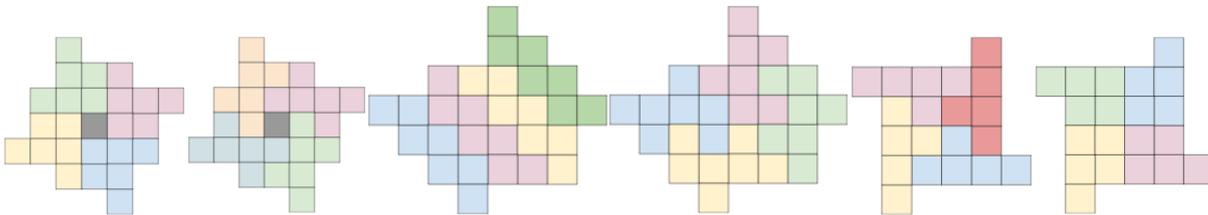


Решение:

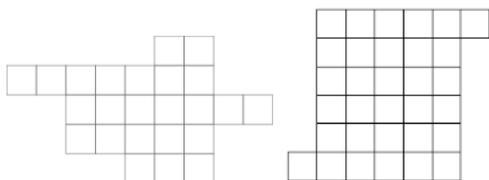
Считаем, сколько клеток в каждой фигуре, затем определяем сколько клеточек должно быть в маленьких фигурках. Так как фигуры симметричны, то можно использовать симметрию или закручивать относительно центра или центральной клетки по правилу вентилятора.

Ответ:

Например, можно разрезать следующим образом.

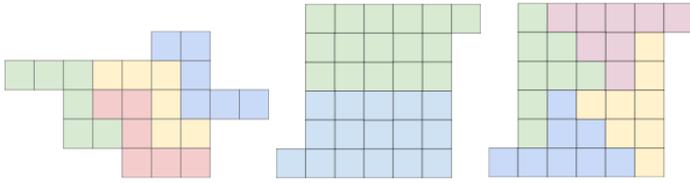


в. На 4 равные части левую фигуру, на 2 и на 4 равные части правую фигуру.

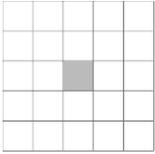


Ответ:

Например, можно разрезать следующим образом.

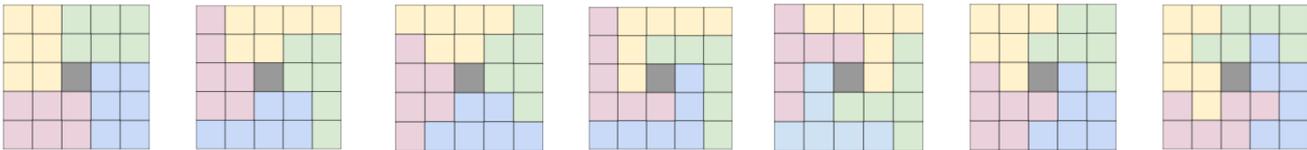


г. Разрежьте квадрат 5×5 с вырезанной центральной клеткой на 4 равные части по линиям сетки. Придумайте 7 способов.



Ответ:

Например, можно разрезать следующим образом.



5.2 Разбейте прямоугольник 3×12 на 9 квадратов по линиям сетки.

Решение:

В условии не сказано, что все квадраты должны быть одинаковыми. Проверяем, сколько будет квадратов, если разрезать на самые большие (3×3), потом средние (2×2), и самые маленькие (1×1). Так как поместится только 4 больших квадрата, то один из них можно разрезать на меньшие. Если будем резать только на средние, то останется много маленьких (6 средних и 12 маленьких).

Помните, что при разрезании не должно оставаться каких-то отдельных частей, которые не участвуют в разрезании. Все должно быть использовано, если не разрешено условием что-то выкинуть.

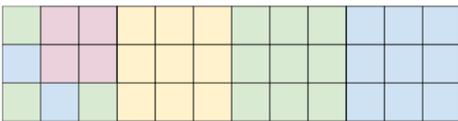
Фактически мы раскладываем число $3 \times 12 = 36$ на сумму квадратов, из которых нам надо взять как можно меньшее количество.

$$1 \times 1 = 1, 2 \times 2 = 4, 3 \times 3 = 9$$

$$36 = 9 + 9 + 9 + 9 = 9 + 9 + 9 + 4 + 5 = 9 + 9 + 9 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 \times 9 + 1 \times 4 + 5 \times 1 = 3 \times (3 \times 3) + 1 \times (2 \times 2) + 5 \times (1 \times 1).$$

Ответ:

Например, так.



5.3 Можно ли разрезать прямоугольник 17×18 по линиям сетки: а. на 4 равные фигуры; б. на четырехклеточные фигурки?

Решение:

Нельзя, так как $17 \times 18 = 306$, а 306 не делится на 4.

Ответ:

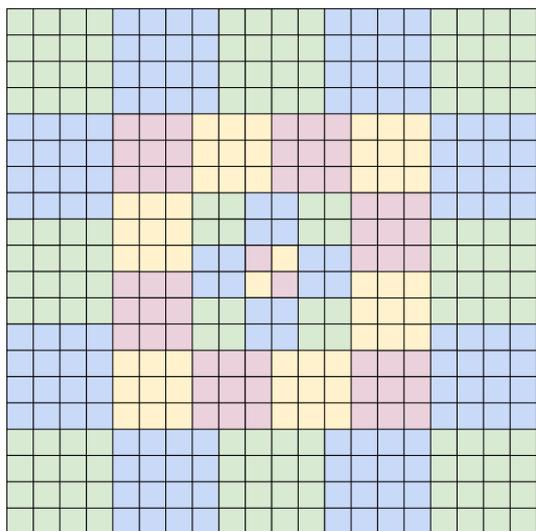
Нет в обоих случаях.

5.4 Можно ли разрезать квадрат 20×20 используя 4 квадрата 1×1, восемь квадратов 2×2, двенадцать квадратов 3×3 и шестнадцать квадратов 4×4?

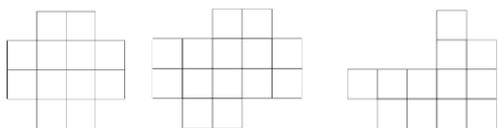
Решение:

Проверяем сначала сумму площадей всех меньших квадратов, она равна $20 \times 20 = 400$, поэтому пробуем привести пример. Можем использовать симметрию – закручивать относительно центра, а также можно привести много других вариантов разрезания.

Ответ:

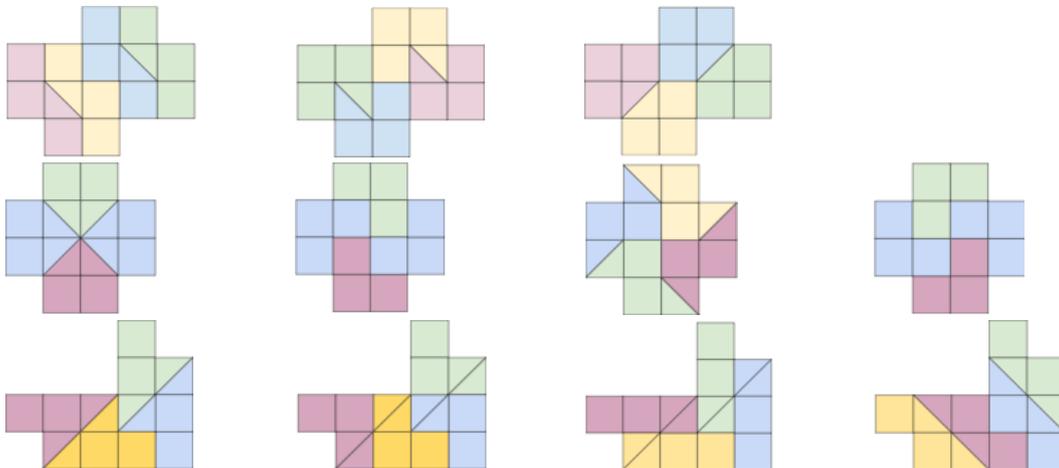


5.5 Разрежьте на 4 равные части тремя разными способами. Способы разрезания, которые при поворачивании фигуры совпадают, считаются одинаковыми.

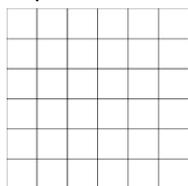


Ответ:

Например, так.



5.6 а. Покажите, как разрезать прямоугольник размером 6×6 трехклеточными уголками так, чтобы никакие два из них не образовывали прямоугольник.

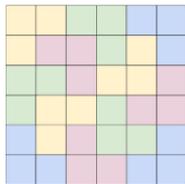


Решение:

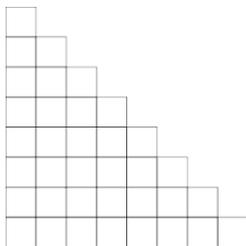
Покажем, как может быть получено одно из возможных решений. В прямоугольнике 6×6 – 36 клеток, это означает, что всего на $36/3 = 12$ трехклеточных уголков требуется разрезать фигуру. Начнем разрезать из центра прямоугольника: используя разрезание «вентилятором», «закручиваем» трехклеточный уголок вокруг центра. Остается разрезать еще на 8 трехклеточных уголков – способ однозначно определен. Нетрудно проверить, что такое разрезание удовлетворяет условию задачи.

Ответ:

Например, так.



б. Покажите, как разрезать предложенную фигуру (уголок) трехклеточными уголками.

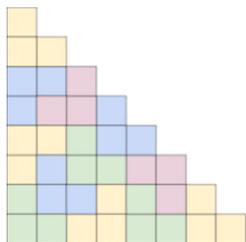


Решение:

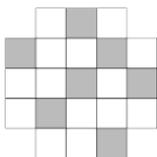
Покажем, как может быть получено одно из возможных решений. Начинаем разрезать с нижнего левого угла фигуры: применяя разрезание «стопочкой», «поднимаем» трехклеточный уголок по диагонали вверх. Таким образом, мы «разбили» данную фигуру на 2 равные части. Остается заметить, что каждая из оставшихся частей состоит из 12 клеток, а значит, каждую из них надо разрезать на 4 трехклеточных уголка. Таким образом, получаем нужное разрезание.

Ответ:

Например, так.



в. Разрежьте фигуру на трехклеточные уголки так, чтобы в каждом уголке была закрашенная клетка.

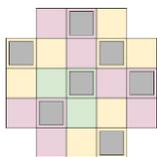


Решение:

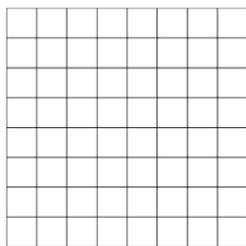
Покажем, как может быть получено одно из решений. В приведенной фигуре 13 клеток, значит, требуется разрезать на $13/3 = 4$ трехклеточных уголков. В условии выделено 7 клеток, значит, при разрезании в каждом трехклеточном уголке будет ровно одна закрашенная клетка. Заметим, что 3 закрашенные клетки, расположенные на «диагонали» фигуры, делят ее на 2 равные части. Используя разрезание «стопочкой», располагаем 2 трехклеточных уголка по главной диагонали, и еще один уголок на диагонали размещаем симметрично уже поставленному уголку относительно центральной закрашенной клетки. А затем еще на 2 трехклеточных уголка разбиваем каждую из оставшихся равных частей. Таким образом, получаем нужное разрезание.

Ответ:

Например, так.



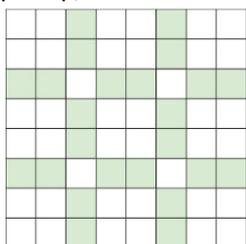
5.7 а. Незнайка хочет из клетчатой доски 8×8 вырезать 12 кусков в форме прямоугольников 1×2 так, чтобы из оставшейся части доски невозможно было вырезать прямоугольник 1×3. (Резать можно только по линиям сетки). У него это получилось! Как?



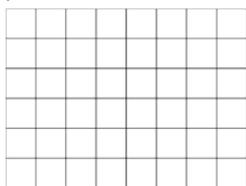
Решение:

Ответ:

Например, так.



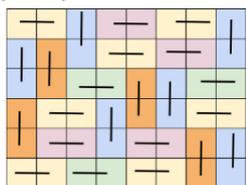
б. Разрежьте прямоугольник 6×8 на доминошки так, чтобы любой отрезок с концами на сторонах прямоугольника пересекал хотя бы одну из доминошек.



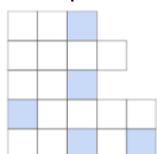
Решение:

Ответ:

Например, так.



5.8 а. Разрежьте фигуру на пять четырехклеточных фигурок различной формы таким образом, чтобы в каждой из пяти фигур была ровно одна закрашенная клетка.

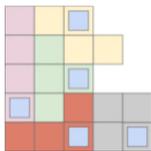


Решение:

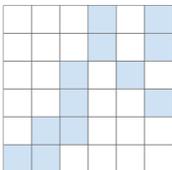
Четырехклеточные фигурки – это тетрамино. Нарисуйте все возможные комбинации из 5 клеточек, соединенных по стороне. Начнем с самой «неудобной» фигурки – полоски 1×4. Ее можно разместить в 3 возможных местах. Рассматриваем все случаи, пока не найдем подходящую расстановку, учитывая что фигурки не должны повторяться. Например, положим полоску в нижний левый угол, тогда в правом нижнем углу однозначно определяется фигурка уголок (или буква L), затем квадрат 2×2 тоже имеет единственное положение, а вот оставшиеся клеточки на неповторяющиеся фигурки разрезать нельзя. Значит, рассматриваем другой случай и так далее.

Ответ:

Например, так.



б. Разрежьте изображённую на рисунке доску 6×6 на четыре одинаковые части, чтобы каждая из них содержала три заштрихованные клетки.



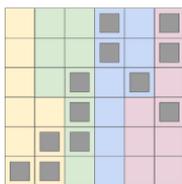
Решение:

Можно разрезать условно квадрат на 2 равных прямоугольника вертикальной прямой и заметить, что количество закрашенных клеточек в обеих частях равно 6.

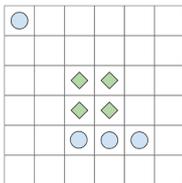
Также сумма всех клеточек $6 \times 6 = 36$, $36 / 4 = 9$ клеточек должно быть в каждой части, $12 / 4 = 3$ (или $6 / 2 = 3$) закрашенные клеточки должны быть в каждой фигуре. Один из способов разрезания приведен на рисунке. Попробуйте найти еще один способ разрезания, если действовать методом вентилятора – закрутить симметричные детали относительно центра квадрата.

Ответ:

Например, так.



5.9 а. Разбейте данную фигуру на части так, чтобы все они были равны и каждая из них содержала ровно по 2 различных символа (круг и ромб).

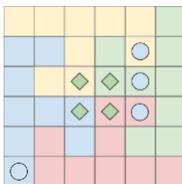


Решение:

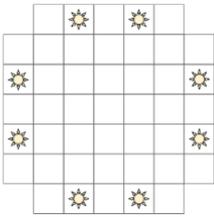
Покажем, как может быть получено одно из возможных решений. В приведенной фигуре 36 клеток, в 8 из них содержится по 1 символу (в 4 клетках – ромб, в 4 клетках – круг). Значит, в соответствии с условием, фигуру требуется разрезать на 4 равных части (по 9 клеток в каждой). Начинаем разрезание из центра: симметрично делаем «разрезы» в 4 стороны длиной по 2 клетки – строим очертания 4 равных частей. Заметим, что на данном этапе каждая из частей содержит по ромбу. Далее, продолжая так же симметрично проводить очертания, получаем нужное разрезание.

Ответ:

Например, так.



б. Разбейте данную фигуру на уголки из 3 и 5 клеток, так чтобы солнышки были только в уголках из 5 клеток.



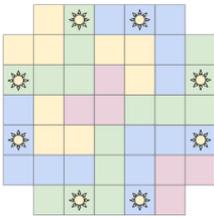
Решение:

Покажем, как может быть получено одно из возможных решений. Заметим, что диагональ фигуры (из левой верхней «диагональной» клетки в правую нижнюю «диагональную» клетку) разбивает фигуру на 2 равные части (с точностью до расположения солнышек), поэтому будем разрезать данную фигуру симметрично относительно этой диагонали. Поместим вершину одного из трехклеточных уголков в центр, а затем симметрично относительно этого уголка поместим два 5-клеточных уголка и 2 3-клеточных уголка с вершинами на уже упомянутой диагонали. Таким образом, 4 из 8 солнышек уже размещены в 5-клеточных уголках. Остается по 2 солнышка, расположенные симметрично относительно упомянутой ранее диагонали, - помещаем их в 2 5-клеточных уголка.

Заметим, что в условии не сказано, что в каждом уголке из 5 клеток должно содержаться ровно по 1 солнышку.

Ответ:

Например, так.



5.10 Однажды Электроник пришел к Семену Николаевичу и сказал: я составил из прямоугольников с периметрами 20 и 46 квадрат, Семен Николаевич засомневался, возможно ли это. Не ошибся ли Электроник?

Решение:

Электроник ошибся. Пусть квадрат разрезали на два прямоугольника. Докажем, что они занимают по 2 угла квадрата. Заметим, прямые углы квадрата окажутся прямыми углами прямоугольников. Возможны следующие варианты.

1. Все четыре угла попали в один прямоугольник. Тогда он совпал с квадратом, и другого прямоугольника просто нет.
2. Три угла попали в один прямоугольник. Аналогично 1 случаю.
3. Два угла попали в один прямоугольник. Если это углы, расположенные по диагонали, то случай опять аналогичен 1.
4. Два угла попали в один прямоугольник. Тогда два других попали в другой прямоугольник.

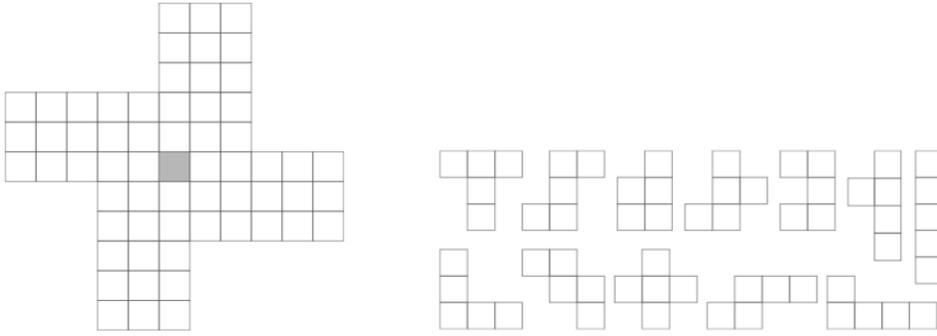
Получим, что одна пара сторон в каждом прямоугольнике равна стороне квадрата, а две другие пары сторон в сумме образуют пару сторон квадрата. Отсюда получаем, что сумма периметров прямоугольников равна 6 длинам стороны квадрата. Тогда сторона квадрата равна $(20 + 46) / 6 = 11$. Но тогда периметр каждого из прямоугольников не меньше 22 - противоречие.

Ответ:

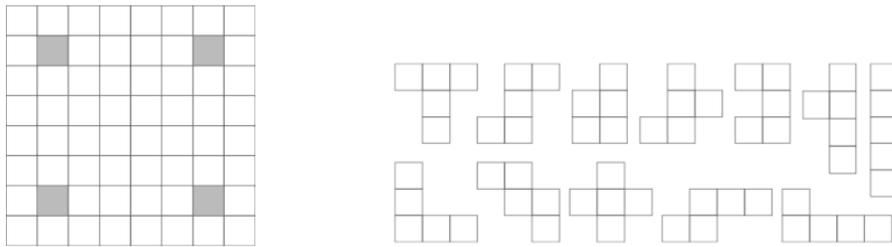
Электроник ошибся.

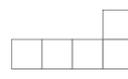
Следующие задачи были дополнительными для тех, кто хочет в свободное время подумать над головоломками. Поэтому предлагаем вам их для самостоятельного решения.

5.11 а. Разрежьте фигуру с вырезанной на 12 различных фигурок пентамино. (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)



б. Разрежьте квадрат 8×8 с четырьмя вырезанными клетками на 12 различных фигурок пентамино. (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)



5.12 а. Сложите какой-нибудь прямоугольник из фигурок вида  и  так, чтобы оба вида фигурок присутствовали. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

б. Разрежьте квадрат 8×8 на фигурки вида  и  так, чтобы фигур обоих видов было поровну.

5.13 Во всех 12 фигурах разрежьте фигуру ровно на две равные части. Разрезы достаточно проводить только по сторонам или диагоналям клеток.

