Граф – это набор точек, некоторые из которых соединены отрезками. Точки называются **вершинами**, отрезки – **рёбрами**.

Граф Иван Иванович Шувалов (1727 – 1797)
Один из основателей Московского университета.

16.0. *В стране Цифра есть девять городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли из города 1 добраться в город 9?*

Ответ: *Нет*

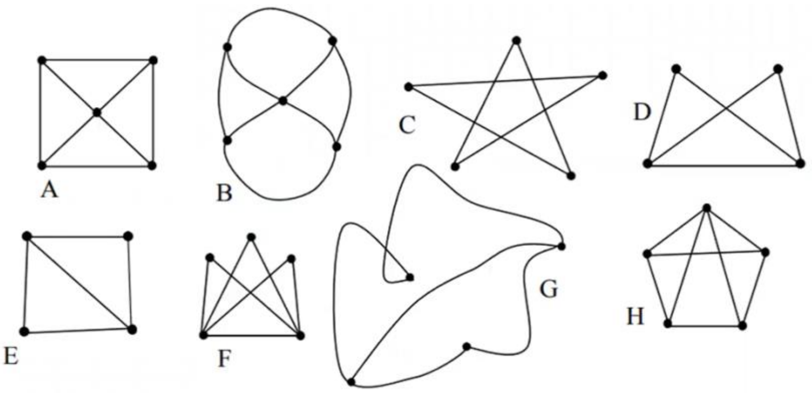
Решение: *рисуем граф авиалиний, получаем, что в подграф из городов 3, 6 и 9 нет авиалиний извне*

16.1. На хуторе Малолюдном 9 дворов. Известно, что у Кобылина в соседях Жеребцов и Лошадинин, Коренников живёт по соседству с Жеребцовым и Пристяжкиным, Жеребенко – с Лошадевичем и Кобылянским, а также по соседству живут Коненко с Кобылянским, Жеребцов с Пристяжкиным, Коненко с Лошадевичем, Лошадинин с Пристяжкиным, и больше соседей на хуторе нет. Может ли Кобылин огородами пробраться к Кобылянскому за вишней?

Ответ: Нет

Решение: рисуем граф соседства, получаем, что с Жеребенко, Лошадевичем, Кобылянским и Коненко никто другой не соседствует

16.2. Найдите все одинаковые графы на картинке:



Ответ: A=B=H (пирамида), C (все вершины степени 2), D=E=G (два треугольника на общем основании, остальные все по 5 вершин), F (две вершины степени 4)

Граф Алексей Кириллович Разумовский (1748 – 1822)
Попечитель Московского университета.

Решение: Для удобства поиска можно пользоваться – выпрямления и искривления ребер, перенос вершин, подсчет кол-ва вершин/ребер, подсчет количества ребер у каждой вершины (степень).

16.3. Коля собирает домашнюю компьютерную сеть, соединяя компьютеры проводами. В маршрутизатор вставил четыре провода, в три компьютера по три провода, в четыре – по два провода и ещё в один компьютер – один провод. Сколько проводов пришлось использовать Коле?

Ответ: 11

Решение: 1 * 4 + 3 * 3 + 4 * 2 + 1 * 1 = 4 + 9 + 8 + 1 = 22 конца. Каждый провод имеет два конца, значит посчитан дважды.

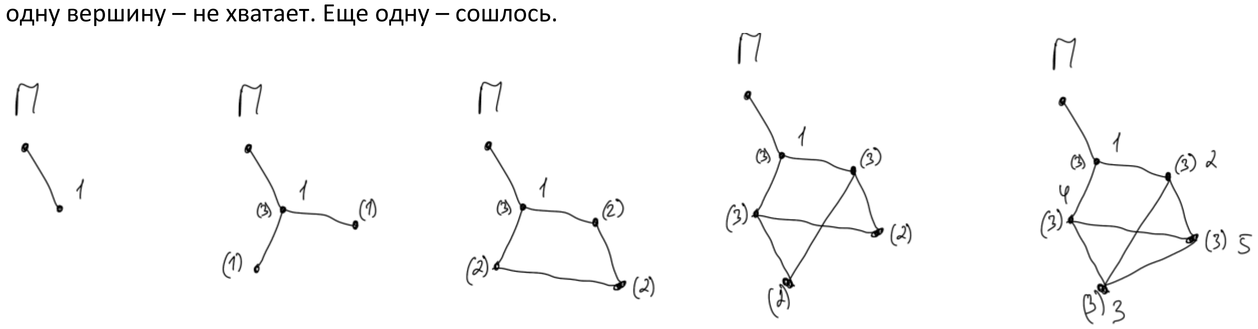
22 : 2 = 11 проводов

Степень вершины графа – это количество исходящих из неё рёбер.

16.4. Барон Мюнхгаузен рассказывал о своей службе в России: “Дорожная сеть устроена у них весьма любопытно: из новой столицы, Петербурга, выходит единственная дорога, из всех остальных городов выходит по три”. Можно ли верить этому рассказу барона?

Ответ: Да, например П-1, 1-2, 1-4, 2-3, 2-5, 3-4, 3-5, 4-5

Решение: Добавляем сначала первую вершину, потом к ней 2 ребра в 2 вершины новые. Не хватает. Добавляем еще одну вершину – не хватает. Еще одну – сошлось.



16.5. В городе Квадратном 100 крестообразных перекрёстков, причём улицы обязательно начинаются и заканчиваются на перекрёстке и не содержат перекрёстков внутри. Сколько в Квадратном улиц?

Ответ: 200

Решение: Пересчитаем концы улиц. У каждой их два, на каждом перекрёстке по 4, всего концов получается 4*100=400. Так как у улицы два конца, всего улиц 400:2=200

16.6. На первенстве города Квадратного по дартсу один участник половину дротиков сломал, а половину потерял, после чего не смог продолжить участие. Сколько было участников, если известно, что первенство проходило в один круг и было проведено 24 матча? Сколько матчей успел провести выбывший участник?

Ответ: 3

Решение: Если 5 участников, то 5 * 4 / 2 = 10 матчей < 24 - мало

если 6, то 6 * 5 / 2 = 15 < 24

если 7, то 7*6/2 = 21 < 24

если 8, то 8*7/ 2 = 28 > 24 – превысили

Осталось проверить, что для следующего числа разрыв больше, чем потенциальное кол-во матчей, которые мог сыграть участник:

если 9, то 9*8/ 2 = 36 > 24+8 – не подходит

Итак, 28 - 24 = 4 несыгранных матча → 8 - 1 = 7 матчей должен провести каждый участник → 7 – 4 несыгранных = 3 матча успел провести.

16.7. В открытом первенстве города Квадратного по квадратно-гнездовой борьбе участвовали самбисты и дзюдоисты. Всего их было 15, самбистов было 9. Каждый боролся с каждым по одному разу, самбисты выиграли половину поединков с дзюдоистами. Сколько всего побед одержали самбисты, если ничьих не было?

Ответ: 63

Решение: самбисты боролись с дзюдоистами 9*6 = 54 раза и выиграли 27 поединков. Между собой самбисты боролись 9*8 / 2 = 36 раз, каждый раз кто-то побеждал (и это обязательно самбист). Всего 27+36=63 победы.

16.8. В совершенно секретном чате несколько военных и один журналист обсуждают что-то совершенно секретное. Сообщения приходят всем, кроме отправившего. Каждый написал одинаковое количество сообщений, после чего журналист заметил, что всего всеми было получено 440 сообщений. Сколько военных участвовало в обсуждении?

Ответ: 1; 4 или 10.

Решение: пусть каждый из n человек отправил k сообщений. Тогда от него остальным пришло k*(n - 1) сообщений (отправил k всем остальным). Всего пришло n*k*(n-1) сообщений. Посмотрим, как можно разложить 440 на множители, чтобы два отличались на единицу: 1*2*220, 4*5*22, 10*11*4. Итого n = 2, 5 или 11 и не забываем вычесть журналиста.

16.9. Докажите, что количество рёбер в графе равно полусумме степеней вершин.

Решение: каждое ребро соединяет две вершины, значит дважды участвует в сумме степеней, значит для подсчёта их количества нужно сложить степени вершин и поделить пополам

16.10. *(Лемма о рукопожатиях)* Издревле люди здоровались, пожимая руки. Неизвестно, сколько всего рукопожатий было сделано, но говорят, что людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётное количество. Докажите это.

Решение:

Каждое рукопожатие учитывается дважды, то есть полное количество подсчитанных рукопожатий всегда будет чётным числом. Люди, сделавшие чётное число рукопожатий, не будут влиять на чётность общей суммы — они добавляют чётные числа. Люди, сделавшие нечётное число рукопожатий, добавляют нечётные числа. Чтобы сумма всех чисел (или же общее количество рукопожатий) оставалась чётной, количество нечётных слагаемых (людей с нечётным количеством рукопожатий) тоже должно быть чётным. Таким образом, число людей, которые пожали руки нечётное количество раз, всегда чётно.

Решение альтернативное: будем считать как меняется количество людей с нечётным числом рукопожатий.

Если рукопожатие совершили люди с нечётным числом, то людей с нечетным числом рукопожатий стало на 2 меньше.

Если рукопожатие совершили люди с четным числом рукопожатий – то людей с нечетным числом рукопожатий стало на 2 больше

Если с разной чётностью – не изменилось (+1 и -1). Получается, что чётность сохраняется, а до самого первого рукопожатия их было 0 (четное). Значит, количество людей с нечётным числом рукопожатий – четное число.