12.1. На каникулах в кино пришло 200 ребят. На приключенческий фильм было продано 152 билета, а на комедию — 97. Сколько ребят посмотрели и тот фильм, и другой? (Каждый посмотрел по меньшей мере один из фильмов.)

Решение:

Рисуем 2 пересекающихся круга, обозначающих тех, кто смотрел приключенческий фильм и комедию соответственно.
97 человек смотрели комедию, значит 200 - 97 = 103 человека не смотрели комедию. Так как каждый из ребят что-то смотрел, эти 103 человека смотрели приключения и не смотрели комедию. Отмечаем это на нашем рисунке. Пишем число 103 в область круга, которая отвечает за тех, кто смотрел приключения и не пересекается с другим кругом. Тогда 152 - 103 = 49 будет в пересечении кругов.

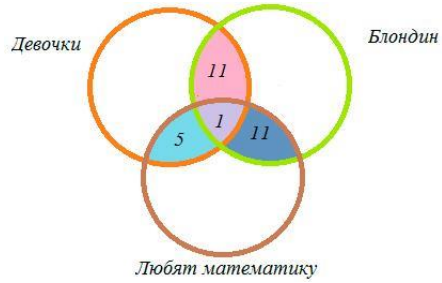
Ответ: 49.

12.2. Каждый ученик класса - может быть девочкой, блондином или математиком. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок, но одна блондинка математик. Всего в классе 24 ученика - блондина, среди них математиков 12, а всего математиков (мальчиков и девочек) 17, из них 6 девочек. Сколько учеников в данном классе?

Решение:

Изобразим с помощью кругов Эйлера данные из задачи:

1) 12 - 1 = 11 (учеников) - девочек блондинок,
2) 12 - 1 = 11 (учеников) - блондины-математики,
3) 6 - 1 = 5 (учеников) - девочек-математиков



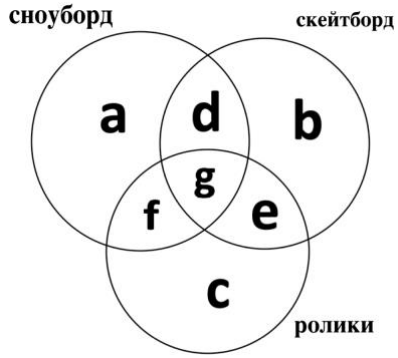
4) 20 - 11 - 1 - 5 = 3 (ученика) - девочки,
5) 24 - 11 - 1 - 11 = 1 (ученик) - блондины,
6) 17- 5 - 1 - 11 = 0 (учеников) - математики

7) 3 + 1 + 0 + 5 + 11 + 11 + 1 = 32 (ученика) - всего в классе.

Ответ: 32 ученика.

12.3. Из 100 ребят, отправляющихся в детский оздоровительный лагерь, кататься на сноуборде умеют 30 ребят, на скейтборде — 28, на роликах — 42. На скейтборде и на сноуборде умеют кататься 8 ребят, на скейтборде и на роликах — 10, на сноуборде и на роликах — 5, а на всех трех — 3. Сколько ребят не умеют кататься ни на сноуборде, ни на скейтборде, ни на роликах?

Решение:



Нарисуем круги, обозначим количество детей в каждой области буквами, как на рисунке. Из условия получаем, что **g = 3**.

По условию, на сноуборде и роликах умеют кататься 5 ребят. То есть g + f = 5. Получаем **f = 2**.

Точно таким же образом: по условию, d + g = 8. **d = 5**.

По условию, e + g = 10. **e = 7**.

По условию, a + d + f + g = 30. **a = 20**.

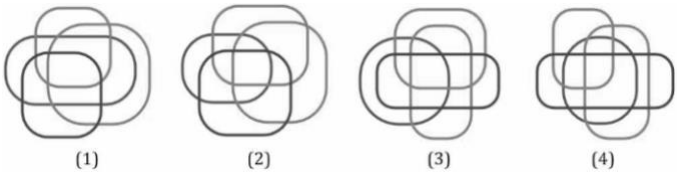
По условию, b + d + e + g = 28. **b = 13**.

По условию, c + f + e + g = 42. **c = 30**.

Получаем, a + b + c + d + e + f + g = 80. Значит 100 - 80 = 20 ребят не умеют кататься ни на чём.

Ответ. 20.

12.4. Круги Эйлера – иллюстрация, на которой три круга изображают три множества. При этом границы кругов разграничивают такие области, что для каждого сочетания «принадлежит или не принадлежит множеству» есть своя область. Бывают картинки и для 4 множеств. Их нельзя изобразить кругами. Чаще их называют диаграммами Венна (в честь математика Джона Венна, жившего в 1834–1923 годах). Ниже приведены диаграммы для 4 множеств. Какие из них являются диаграммами Венна, то есть изображают все возможные сочетания из 4 множеств?



Решение:

Подходит фигура (3). Потому что здесь есть 16 вариантов, как объект может находиться относительно этих 4 множеств. В каждом он может либо лежать, либо не лежать. Получается 2^4 = 16 вариантов. На рисунке (3) есть 15 областей внутри фигуры, которые отвечают всем вариантам расположения. 16-я область находится снаружи и отвечает варианту, когда объект не лежит ни в одном из 4 множеств.

Фигура (1) не подходит, потому что там внутри 13 областей, а нужно 15.

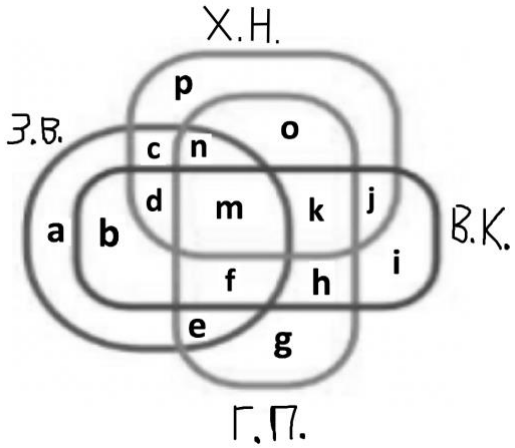
Фигура (2) не подходит, потому что там внутри 13 областей, а нужно 15.

Фигура (4) не подходит, потому что там внутри 17 областей, но некоторые учтены дважды. Например, самая правая и самая левая области отвечают одному и тому же варианту. В итоге тут есть как минимум 3 пары областей, отвечающих одинаковым вариантам. А ещё в диаграммах Венна области, отвечающие одному и тому же варианту, не должны распадаться на несвязные куски.

Ответ: 3.

12.5. Из 1000 ребят, обучающихся на Малом Мехмате МГУ, 334 смотрели “Гарри Поттера”, 308 смотрели “Звездные войны”, 293 смотрели “Властелина колец”, 266 смотрели “Хроники Нарнии”. “Звездные войны” и “Гарри Поттера” смотрели 79 ребят. “Звездные войны” и “Властелина колец” смотрели 67 ребят. “Звездные войны” и “Хроники Нарнии” смотрели 59 ребят. “Гарри Поттера” и “Властелина колец” смотрели 32 человека. “Гарри Поттера” и “Хроники Нарнии” смотрели 125 ребят. “Властелина колец” и “Хроники Нарнии” смотрели 110 ребят. Все 4 фильма смотрели 26 ребят. При этом если кто-то не видел один из этих 4 фильмов, он обязательно не видел и ещё один из них. Сколько ребят не смотрели ни один из этих фильмов?

12.6. **Решение:**



Нарисуем диаграмму Венна для 4 множеств. Мы знаем, как она выглядит из прошлой задачи. Обозначим буквами количества детей в областях.

m = 26 - по условию

d = k = f = n = 0 - из условия ясно, что никто из ребят не смотрел ровно 3 фильма.

По условию, c + d + n + m = 59. **c = 33**

По условию, o + k + n + m = 125. **o = 99**

По условию, h + k + f + m = 32. **h = 6**

По условию, b + d + f + m = 67. **b = 41**

По условию, e + f + n + m = 79. **e = 53**

По условию, j + d + k + m = 110. **j = 84**

Теперь проверяем условия на 1 множество.

По условию (З.В.), a + b + c + d + e + f + n + m = 308. **a = 155**

По условию (Г.П.), e + f + g + h + k + m + n + o = 334. **g = 150**

По условию (Х.Н.), p + c + d + j + k + n + m + o = 266. **p = 24**

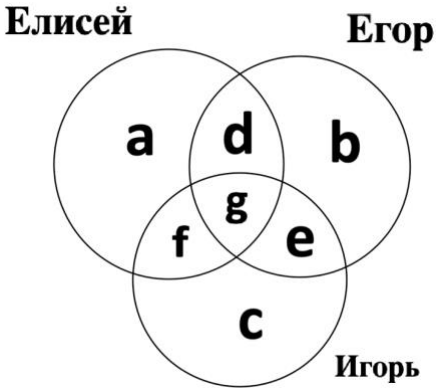
По условию (В.К.), b + d + f + h + i + j + k + m = 293. **i = 136**

В итоге a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + m + n + o + p = 807. Всего учеников 1000, значит ни одного фильма не видели 193 ученика.

Ответ: 193.

12.7. Елисей, Егор и Игорь решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

Решение:



Нас просят найти величину a + b + c - g, мы знаем, что

a + d + f + g = b + d + e + g = c + e + f + g = 60, и

a + b + c + d + e + f + g = 100.

Вычтем из всех задач те, которые решил Игорь:

100 - 60 = a + b + d.

Аналогично получаем, что a + f + c = b + e + c = 40.

120 = 40 + 40 + 40 = (a + b + d) + (a + f + c) + (b + e + c) = (a + b + c + d + e + f + g) - g + (a + b + c) = 100 + (a + b + c) - g.

Значит трудных задач на 20 больше, чем легких.

Ответ: Трудных на 20 больше, чем легких.

12.8. В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «ПА», на остальных — «РА». Каждый ребёнок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «ПАПА» могут сложить из своих карточек 20 детей, слово «РАРА» — 30 детей, а слово «ПАРА» — 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

Решение:

Каждый ребенок может составить либо «ПАПА», либо «РАРА». Значит всего детей 20 + 30 = 50. Те, у кого 3 одинаковых, не могут сложить слово «ПАРА». Причем все остальные так могут. Значит искомое число детей с 3 одинаковыми карточками 50 - 40 = 10.

Ответ: 10.

12.9. На острове ⅔ всех мужчин женаты и ⅗ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?

Решение:

	Мужчины	Женщины
В браке	x	x
Не в браке	1/2 x	2/3 x

Нарисуем таблицу (рисунок выше). В браке одинаковое количество мужчин и женщин. Это число обозначим за x. Мужчин не в браке тогда ½x, потому что по условию ⅔ всех мужчин женаты. Похожими соображениями получаем, что женщин не в браке ⅗x. Теперь суммируем числа во всех полях таблицы, получаем, что всего людей $^{19}/_{6}$x. В браке среди них 2x. Значит в браке 12/19 населения острова.

Ответ: 12/19.

12.10. Во дворе стоят машины. Некоторые из них — москвичи, а остальные — жигули. Некоторые из машин красные, а остальные белые. Некоторые из машин новые, а остальные — старые. Известно, что красных москвичей — 3, новых москвичей — 4, а новых красных машин — 5. При этом старых белых москвичей — 2, новых белых жигулей — 1, а старых красных москвичей вообще ни одного. Сколько во дворе новых красных москвичей, если всего машин 21, а старых белых жигулей — 6?

Решение:

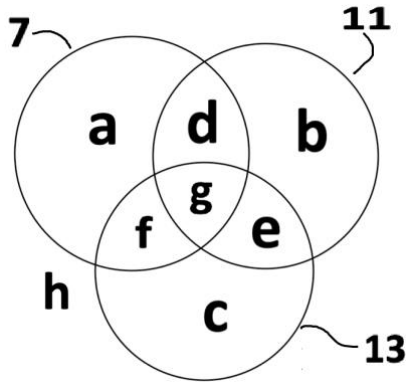
Это задача с избыточными условиями. Нам известно, что всего красных москвичей 3. И старых красных москвичей вообще ни одного. Значит они все новые.

Ответ. 3.

12.11. На доске написаны 100 натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых шести из них кратно 1001. Какое наименьшее количество чисел, кратных 1001, может быть на доске?

Решение:

1001 = 7*11*13. Рисуем 3 круга Эйлера, обозначающих множества чисел, делящихся на 7, на 11 и на 13.



Обозначения как прежде, только теперь появилось h – количество чисел, не делящихся ни на 7, ни на 11, ни на 13. g – количество чисел, кратных 1001, так как все числа в пересечении кругов делятся на 7, на 11 и на 13. Заметим, что:

h + a + d ≤ 5 (так как все эти числа не лежат в круге, отвечающем числам, делящимся на 13, если бы h + a + d было больше 5, мы бы смогли найти 6 чисел, произведение которых не делится на 1001.)

b + e ≤ 5 по аналогичным причинам.

c + f ≤ 5 по аналогичным причинам.

В итоге a + b + c + d + e + f + h ≤ 15, а всего чисел 100. Значит g не меньше, чем 85. Это была оценка снизу на количество чисел, кратных 1001. Она достигается при g = 85 и d = e = f = 5. Условия задачи при этом выполняются.

Ответ: 85.

12.12. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимается не менее ⅔ всего класса.

Решение:

Если в некоторый кружок ходит весь класс, то всё в порядке. Далее мы считаем, что *такого кружка нет*. Пусть самый многочисленный кружок математический; его участников мы будем называть *математиками*. Есть ученик Вася, который в него не ходит. Рассмотрим его и одного из математиков. Они вместе ходят в другой кружок, допустим, в фото. Вася не может ходить в этот кружок вместе со всеми математиками, иначе математический кружок не будет самым многочисленным. Значит, с кем-то из математиков он ходит еще в один кружок, например, в танцевальный. Итак, каждый математик ещё является либо *фотографом*, либо *танцором* (и никем другим). То, что было выше сказано про Васю, можно сказать и про любого ученика, который не является математиком: каждый из таких учеников – *фотограф* и *танцор* одновременно (и больше ни в какие кружки не ходит). Таким образом, кружков всего три, и каждый ученик ходит ровно в два кружка. Пусть в классе n учеников, тогда на три кружка в общей сложности приходится $2n$ их участников. Поэтому в математический кружок (самый многочисленный) ходит не менее, чем $^{2n}/_{3}$ учеников.