

- 11.1.** Вовочка договорился с бабушкой и за каждую пятерку в дневнике получает по рублю. В течение 10 дней он каждый день приносил одну, три или пять пятёрок. Мог ли он в результате получить ровно 25 рублей?

Решение.

Нет. Сумма 10 нечётных слагаемых должна быть чётной.

- 11.2.** Восемь новогодних елок стоят в ряд, известно, что количество елочных игрушек на всяких двух соседних деревьях различается на 1. Может ли быть такое, что суммарное количество всех игрушек будет равно 2025? Почему?

Решение. Числа, выражающие количество игрушек на любых двух соседних елках, имеют разную четность. Так как всего этих чисел восемь, то среди них – четыре четных и четыре нечетных, значит, их сумма – четна. Следовательно, общее количество игрушек не может быть нечетным, то есть, не может быть равным 2025.

- 11.3.** В шесть коробок Сеня положил соответственно 2, 6, 22, 18, 14 и 34 кубика. В какой-то момент из каких-то трех коробок он взял ровно половину кубиков (из каждой коробки). Мог ли он взять в общей сложности 28 кубиков?

Решение.

Чтобы сумма кубиков из трех коробок была четной, нужно чтобы все три слагаемых были четными.

Если мы возьмем половину из каждой коробки, то получим: 1, 3, 11, 9, 7, 17

Так как, все числа нечетные, то сумма нечетного количества нечетных чисел будет нечетной.

Значит, Сеня не сможет взять в общей сложности 28 кубиков, потому что 28 четное число, а возьмет он нечетное количество

- 11.4.** В некотором числе перемножили все цифры. Потом у результата опять перемножили цифры и так до тех пор, пока не получилось число 5. Можно ли сказать, какую четность имела первая цифра исходного числа?

Решение.

Допустим, что первая цифра исходного числа была четной. Тогда произведение цифр этого числа тоже было четным, а значит, оканчивалось на четную цифру. Значит, следующее произведение также четное. И так далее до числа из одной цифры. В конце получилось 5, что приводит к противоречию, так как 5 – нечетное число. Значит, предположение неверно, и первая цифра исходного числа была нечетной.

- 11.5.** Гномы устроили соревнования по танцам на льду, зачем-то взвесив всех участников. Оказалось, что партнёрша гнома весит ровно на 20 кг меньше него, а гном весит целое число килограммов. Перед началом соревнований все 11 пар выстроились на главных весах Каменного Города, которые показали 2025 кг. Не сбились ли весы?

Решение.

Да, сбились. Вместе гном и партнерша составляют удвоенный вес гнома минус 20 кг, то есть четное число. Сумма 11 четных чисел четна. А 2025 кг – нечетное число, противоречие.

- 11.6.** Павсикахий и Вахтисий записали на карточках числа 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, после чего Трифилий выдал три карточки Павсикахию, две Вахтисию, две оставил себе. Павсикахий, посмотрев на свои карточки, верно определил, что сумма карточек у Вахтисия чётна. Вахтисий же в ответ назвал все числа на карточках Павсикахия. Назовите их и вы.

Решение.

Однозначно определить чётность суммы у Вахтисия можно только если Павсикахий забрал все числа одной чётности. Нечетных чисел – 4, четных – 3, значит это возможно только если он забрал все четные: 2, 8, 34.

- 11.7.** В соревнованиях участвовали три персонажа: Миша, Вика и Саша. Миша стартовал первым, но в ходе гонки его обгоняли, либо он обгонял других ровно 12 раз. Вика начала движение последней, однако, в течение гонки её обгоняли, либо она обгоняла других ровно 10 раз. Известно, что Саша финишировал раньше Миши. В каком порядке финишировали участники?

Решение.

Пронумеруем позиции, на которых находятся ребята на старте. Сначала у Миши позиция 1, у Саши — 2, у Вики — 3. При обгоне чётность номера позиции у тех, кто участвует в обгоне, меняется. Значит, у Вики и Миши после чётного числа обгонов она не поменялась, и они вдвоём заняли нечётные места (первое и третье). Саша закончил гонку раньше Миши, а Миша занял нечетное место. Значит, это точно 3 место. Таким образом, Вика прибежала первой, Саша — вторым, Миша — последним.

- 11.8.** На доске нарисовано 30 крестиков и 25 ноликов. За ход можно стереть любые два символа, нарисовав вместо них нолик, если символы одинаковые, или крестик, если символы разные. Какой символ останется на доске тогда, когда нельзя будет сделать новый ход?

Решение.

Рассмотрим как меняется четность крестиков и ноликов за 1 ход:

1. Стираем 2 одинаковых символа - четность числа крестиков не меняется, а четность числа ноликов меняется (поскольку добавляется один нолик после стирания).
2. Стираем 1 крестик и 1 нолик - четность числа крестиков не меняется (так как после стирания добавляется крестик), а четность числа ноликов меняется.

Таким образом, независимо от типа хода, четность числа крестиков остается постоянной, а четность числа ноликов меняется.

Значит, в конце игры, когда останется 1 символ, он не может быть крестиком, так как в начале игры крестиков четное количество. Значит, останется нолик.

- 11.9.** Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу на 1 грамм от настоящих. Петя взял одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, хочет определить фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?

Решение.

Сможет. Отложим Петину монету в сторону. Разделим остальные 100 монет на две кучки по 50 монет и сравним веса этих кучек. Если они отличаются на четное число граммов, то интересующая нас монета настоящая. Если же разность весов нечетна, то монета фальшивая.

- 11.10.** Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?

Решение.

Предположим, что сумма произведений могла равняться 1001. Сумма двух чисел (в данном случае – этих произведений) может быть нечетной, только когда одно из них четно, а другое – нечетно. Значит, одно из произведений четно, а другое нечетно. Рассмотрим какими могут быть эти произведения:

Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение нечетно, то оба числа должны быть нечетными, при этом одно из них должно давать остаток 1 при делении на 4, а другое – остаток 3 при делении на 4 (иначе сумма не будет делиться на 4, а 100 делится на 4). Тогда остаток от деления их произведения на 4 равен $1 \cdot 3 = 3$.

Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение четно, то оба числа должны быть четными. Тогда их произведение даёт остаток 0 при делении на 4.

Таким образом, сумма двух произведений будет давать остаток 3 при делении на 4. Получили противоречие, так как 1001 даёт остаток 1 при делении на 4.