Вводное задание. Выписаны несколько натуральных чисел. С ними проведена некоторая арифметическая операция. Что можно сказать про результаты и четность этих чисел, если:

а) чисел было 6, их сумма оказалась нечетной?

Ответ: среди слагаемых нечетное количество нечетных чисел.

б) чисел было 6, их сумма оказалась чётной?

Ответ: среди слагаемых либо четное количество нечетных чисел, либо нечетных чисел нет.

в) чисел было 7, их сумма оказалась нечетной?

Ответ: среди слагаемых нечетное количество нечетных чисел.

г) чисел было 7, их сумма оказалась чётной?

Ответ: среди слагаемых либо четное количество нечетных чисел, либо нечетных чисел нет.

д) чисел было 6, их произведение нечётно?

Ответ: среди множителей нет четных чисел.

е) чисел было 6, их произведение чётно?

Ответ: среди множителей есть хотя бы одно четное число.

ж) чисел было 7, их произведение нечётно?

Ответ: среди множителей нет четных чисел.

з) чисел было 7, их произведение чётно?

Ответ: среди множителей есть хотя бы одно четное число.

Подумай, почему именно так? Приступай к решению задач, успехов!

1. У Саши при выполнении домашнего задания получилось, что сумма 99 натуральных чисел чётна, а их произведение – нечётно. Верно ли Саша решил задание?

Решение: нет. С одной стороны, если произведение нечетного количества чисел (произведение 99 чисел по условию) нечетно, значит все 99 чисел – нечетные. С другой стороны, сумма нечетного количества нечетных чисел (сумма 99 чисел по условию) – четна, чего не может быть (почему?). Следовательно, Саша ошибся.

2. Не выполняя никаких арифметических действий, определите чётность результата в следующих выражениях. Нужно ли брать в расчет четные числа при выполнении операции сложения/вычитания? А при выполнении операции умножения? Почему?

   а) $1+2+3+\ldots+198+199$

   б) $4\cdot 221 + 32\cdot 77 + 3\cdot 121 + 679\cdot 71\cdot 17 - 178 + 7$

   в) $101+103+105+107+\ldots+207+209$

Решение: Четные числа при выполнении операции сложения/вычитания в расчет брать не нужно, т.к. четные числа на четность результата никак не влияют. Но если *мы перемножаем числа, то при наличии хотя бы одного четного числа среди множителей результат будет четным.*

а) Четное, т.к. складывается четное количество нечетных чисел.

б) ч+ч+н+н-ч+н=Нечетное.

в) Нечетное, т.к. количество нечетных чисел (55 слагаемых) нечетно.

3. Аня и Боря играют в игру. Сначала Аня называет любое натуральное число, а потом Боря называет своё число. Если разность (из большего вычитают меньшее) этих двух чисел окажется нечётной, выиграет Аня, а если чётной – то Боря. Может ли кто-то из них всегда выигрывать? Почему? Ответ поясните.

Решение: при правильной игре Боря будет выигрывать. Четность чисел Ани и Бори должна совпадать.

Замечание: важно объяснить, почему такое действие Бори действительно приносит ему победу. Просто указать, что он должен сделать – не полное решение.

4. Получится ли доску размером 7х7 клеток замостить доминошками размером 1х2 так, чтобы не осталось свободных клеток?

Решение: нет, т.к. количество клеток (7х7=49) нельзя поделить на 2 (доминошки занимают две клетки).

5. А можем ли мы на такой же доске 7х7 разместить 7 шашек так, чтобы они располагались симметрично относительно диагонали? Сколько шашек окажется на диагонали?

Решение: можем, если какие-то шашки будут расположены на диагонали. Из нечетного количества предметов мы должны организовать пары, чтобы их симметрично расположить относительно диагонали. Следовательно, по крайней мере один предмет останется без пары.

На диагонали должно быть расположено не менее одной шашки, но их количество должно быть нечетным.

Замечание: при решении такого рода задач могут возникнуть логические трудности, связанные с тем, что на диагонали может оказаться не обязательно одна, но и любое нечетное число шашек.

6. Однажды встретились 107 инопланетян. Могут ли они одновременно пожать руки друг другу так, что не останется ни одной свободной руки, если у каждого по три руки? А если прилетит еще один инопланетянин?

Решение: общее количество рук нечетно, не менее одной руки будет свободно. Если прилетит еще один, количество рук станет четным, тогда смогут.

7. Петр Сергеевич после контрольной работы в двух одинаковых по численности подгруппах объявил, что все получили оценку 4 или 5. В электронный журнал было выставлено 4 на 17 больше, чем 5. Не ошибся ли Петр Сергеевич? Ответ поясните.

Решение: Ошибся. Посчитаем число оценок двумя способами. Есть две равные по численности группы, значит, общее число учеников – четно, тогда и число оценок – четно. С другой стороны, получено А – пятерок и (А+17) – четверок. Общее число оценок 2А+17 – нечетное число. Число оценок одновременно четно и нечетно, такого не могло быть. Значит, Петр Сергеевич ошибся.

8. На перемене каждый из 15 учеников класса угостил одноклассника 1, 3 или 5 конфетами. Могло ли оказаться так, что каждый ученик получил ровно 2 или 4 конфеты?

Решение: нет. Посчитаем число конфет двумя способами. Нечетное количество конфет (1, 3 и 5) сложили нечетное количество раз (15 учеников), получилось нечетное число. А если посчитать четное количество конфет (2 и 4) нечетное количество раз (15 раз), получится четное число, противоречие.

Замечание: важно указать, что происходит смена четности.

Важно указать, что смен нечетное число.

Важно какая четность в начале и какая в конце.

9. Тосе приснился сон, что она разменяла купюру достоинством 9999 рублей при помощи 200 купюр номиналом 15, 49 и 77 рублей. Могло ли такое случиться наяву?

Решение: нет, т.к. четное количество нечетных элементов не могут дать нечетный результат.

Замечание: важно отметить, что номиналы купюр не перемножаются, а именно складываются.

10. Каждое утро в течение недели (начиная с понедельника) Саша либо брал из вазы на столе 3 конфетки, либо клал в вазу 1 конфету. Могло ли в воскресенье вечером в вазе оказаться 20 конфет, если в начале недели там было нечетное количество конфет?

Решение: прибавляли или отнимали нечетное количество конфет нечетное количество дней – четность конфет в вазе изменилась. Могло.

11. В детском саду дети играли в игру – разрежь на три части. Вера Андреевна положила в коробку длинную ленту. Пришел Саша, достал ленту и разрезал на 3 части, затем положил все три части обратно в коробку. Пришла Лизы, взяла одну из частей ленты, разрезала на 3 части и положила всё обратно в коробку. И так сделали еще несколько детей. Могло ли в итоге в коробке оказаться 100 кусочков ленты?

Решение: после каждого ребенка число кусков в коробке меняется (увеличивается на 2), но четность не меняется, следовательно, не могло.

Замечание: важно указать, что четность сохраняется.

12. Лена купила блокнот, поделенный на блоки по 25, 35, 45 и 55 листов, где каждый блок пронумерован отдельно, начиная с 1. Когда из блокнота выпал один блок, младший брат Лены сложил все номера страниц в этом блоке и объявил Лене, что у него получилось 2000. Лена сказала, что он ошибся. Кто из ребят прав?

Решение: права Лена, т.к. при суммировании нечетного количества нечетных чисел не могло получиться четное число.

13. Получится ли у Пети составить магический квадрат (квадратная таблица, заполненная различными числами таким образом, что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях была одинакова) размером 3х3, заполнив его первыми 9 простыми числами?

    А квадрат 6х6, заполнив его первыми 36 простыми числами?

Решение: нет, т.к. среди первых 9 простых чисел есть одно четное (число 2). Сумма чисел в строке, содержащей двойку, чётна (сумма двух нечётных и одного чётного чисел). В строках, не содержащих двойку, сумма чисел нечётна, следовательно, суммы чисел в каких-то двух строках разные, и получить магический квадрат нельзя.

И 6х6 тоже нельзя, т.к. в столбцах/строках/диагонали(ях), где нет числа 2, сумма чисел четная, а где есть – нечетная.