Геометрическое суммирование

Малый мехмат МГУ

26 сентября 2020 г.

До чего догадался семилетний Гаусс

Будущий «король математиков» Карл Гаусс (1777–1855) в 7 лет поразил школьного учителя, быстро сосчитав сумму

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = ?$$

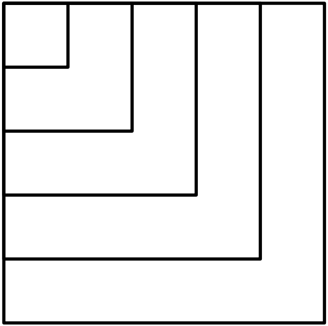
Сосчитайте и вы.

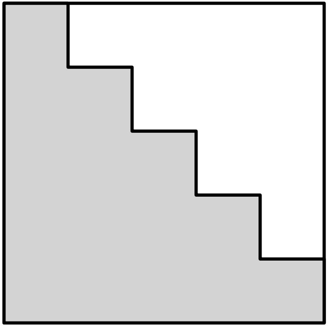
Вычислите суммы

а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$;

б) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

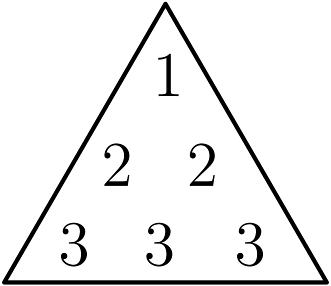
Геометрический метод





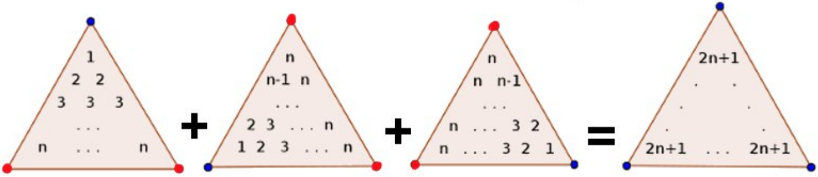
Сумма квадратов

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = ?$$



Сумма квадратов: ответ

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МЕТОДОМ ПРИСТАЛЬНОГО ВГЛЯДЫВАНИЯ В КАРТИНКУ

Геометрические аналогии

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \ldots$$

Формулы площади треугольника и объёма пирамиды:

$$S = \frac{1}{2}ah, \qquad V = \frac{1}{3}Sh.$$

План другого решения

1) Угадать общий вид формулы

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

2) Найти a, b, c, d, подставив $n = 0, 1, 2, 3$.
3) Доказать полученную формулу индукцией по n.

В ожидании формулы Ньютона–Лейбница, или концептуальный метод суммирования

Покажем метод суммирования в духе одной из главных формул анализа — формулы интегрирования Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Её дискретный аналог тривиален: сумма разностей $a_n - a_{n-1}, \ldots, a_3 - a_2, a_2 - a_1$ равна $a_n - a_1$. Положим $a_n = n^3$.

Вопрос к аудитории

Преобразуйте

$$(N-1)^3$$

и

$$N^3-(N-1)^3$$

В ожидании формулы Ньютона–Лейбница, или концептуальный метод суммирования

Запишем равенство

$$N^3 - (N-1)^3 = 3N^2 - 3N + 1$$

для $N = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
1^3 - 0^3 &= 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \\
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \\
&\dots \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1
\end{aligned}$$

Концептуальный метод суммирования

Сложим все равенства: в левой части останется n^3, а в правой — утроенная искомая сумма квадратов минус утроенная сумма $1 + 2 + \ldots + n$ плюс сумма n единиц:

$$n^3 = 3(1^2 + \ldots + n^2) - 3(\underbrace{1 + \ldots + n}_{n(n+1)/2}) + n$$

Сумма кубов

Какие из равенств верны:

$$1^3 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$

Удивительная сумма кубов

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

Доказите по индукции, сделав шаг от $n - 1$ к n.

Удивительная сумма кубов: индукция

Надо понять, что $(1+2+\ldots+n)^2$ больше $(1+2+\ldots+n-1)^2$ ровно на n^3.

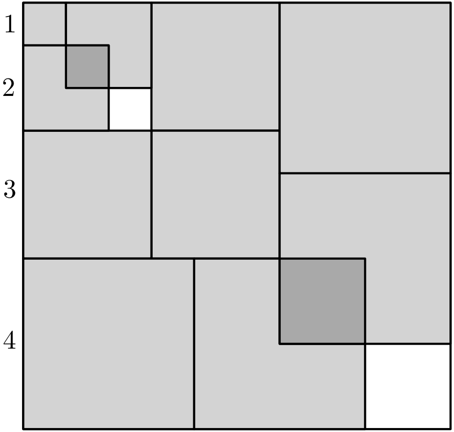
Проверим:

$$(1+2+\ldots+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(1+2+\ldots+n-1)^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

Удивительная сумма кубов: геометрическое видение

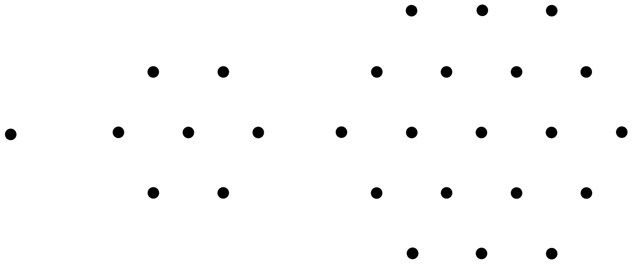
Попробуем располагать квадраты в виде уголков:



Квадраты нечётных размеров аккурат помещаются, а с квадратами чётных размеров, во-первых, накладываются друг на друга, а во-вторых, оставляют пустоты. Но наложения и пустоты компенсируют друг друга!

Гексы

На первом гексе 1 точка, на втором — 7. Сколько на третьем?



1)　　2)　　3)

Сколько на первых двух вместе? А на первых трёх?

А сколько точек на первых ста гексах?

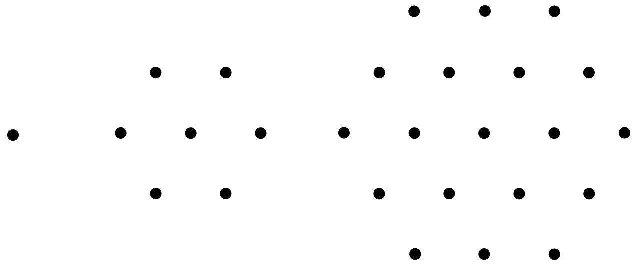
Попробуйте предположить ответ, зная, сколько точек на первых двух и трёх гексах. Проверьте гипотезу для четырёх.

Гексы: алгебра

Пусть на первых n гексах всего S_n точек.
Имеем:
$S_1 = 1$, $S_2 = 8$, $S_3 = 27$.
Тогда на n-м гексе должно быть $S_n - S_{n-1}$ точек. Обратно, если это так, то на первых n гексах будет S_n точек.
Сосчитаем число точек на n-м гексе.

Гексы: геометрия

Ещё раз всмотримся в гексы:

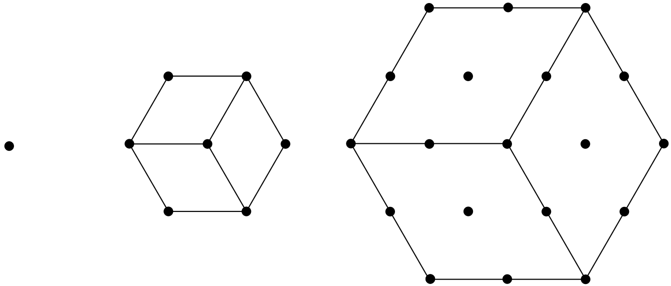


1) 2) 3)

Так ли удивителен ответ? Видите ли вы ответ на картинке?

Гексы: геометрия

А теперь?



Это *видимые части поверхностей кубов*, которые, если вложить друг в друга, сложатся в куб $n \times n \times n$!

Задача Ферма

Сосчитайте сумму

$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$$

Задачи

Докажите любым методом и попробуйте найти геометрический или комбинаторный смысл:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

б) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) =$
$= \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

в) Обобщите предыдущие пункты на любое число множителей в числителях.

Задача

В выпуклом n-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения у всех его диагоналей?

(Можно решить в лоб, сведя к подсчитанным ранее суммам, а можно красиво в одну строчку.)

Дополнительные задачи, другие методы

1) $\sum_{k=1}^{n} k2^k$;
2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k$;
3) $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$;
4) $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k$;
5) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$;
6) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = 2^{n-2} + 2^{n/2-1} \cos \frac{\pi n}{4}$;
7) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos \frac{\pi n}{3}\right)$.

Преобразование Абеля, или дискретное интегрирование по частям

Формула $\int_a^b f dg = fg|_a^b - \int_a^b g df$ имеет дискретный аналог:

$$(a_1 - a_0)b_0 + (a_2 - a_1)b_1 + \ldots + (a_{n+1} - a_n)b_n =$$

$$= a_{n+1}b_n - a_0 b_0 + a_1(b_0 - b_1) + a_2(b_1 - b_2) +$$

$$+ \ldots + a_n(b_{n-1} - b_n)$$

Пример

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} k(2^{k+1} - 2^k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k+1)2^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} k2^k - \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} =$$

$$= (n+1)2^{n+1} - 2 - (2^{n+2} - 4) =$$

$$= (n-1)2^{n+1} + 2.$$