Малый мехмат МГУ **9-11 классы. Группа «А»** **24 октября 2020 г.**

Математическая индукция

1. Из шахматной доски 8×8 вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся часть доски можно покрыть уголками из трёх клеток.

2. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, начиная с 6.

3. Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Докажите, что для любого $n \geq 3$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей вида $\frac{1}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$. (Такие дроби называются египетскими или аликвотными.)

5. Физрук скомандовал детям, стоящим в шеренгу: „Нале-во!“ В эту секунду каждый школьник повернулся либо налево, либо направо. Каждую следующую секунду школьники, оказавшиеся лицом друг к другу, одновременно поворачивались кругом. Обязательно ли все дети рано или поздно перестанут крутиться?

6. Докажите, что последовательность

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

ограничена сверху, т. е. что все её члены меньше некоторого числа.

7. На плоскости нарисовано несколько окружностей, образующих связную фигуру. Докажите, что их можно обвести одним росчерком (не обводя одну линию дважды).

8. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots11}_{3^n}$ кратно 3^n при всех $n \in \mathbb{N}$.

9. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправ ке может проехать 50 километров. Имеются (вне ограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Докажите, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

Малый мехмат МГУ **9-11 классы. Группа «Б»** **24 октября 2020 г.**

Математическая индукция

1. Из шахматной доски 8×8 вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся часть доски можно покрыть уголками из трёх клеток.

2. Докажите, что любую сумму в целое число копеек, начиная с восьми, можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек.

3. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, начиная с 6.

4. Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. Докажите, что для любого $n \geq 3$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей вида $\frac{1}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$. (Такие дроби называются египетскими или аликвотными.)

6. Докажите, что сумма углов n-угольника (возможно, невыпуклого) равна $180^\circ(n-2)$.

7. Физрук скомандовал детям, стоящим в шеренгу: „Нале-во!“ В эту секунду каждый школьник повернулся либо налево, либо направо. Каждую следующую секунду школьники, оказавшиеся лицом друг к другу, одновременно поворачивались кругом. Обязательно ли все дети рано или поздно перестанут крутиться?