Математическая индукция

Малый мехмат МГУ

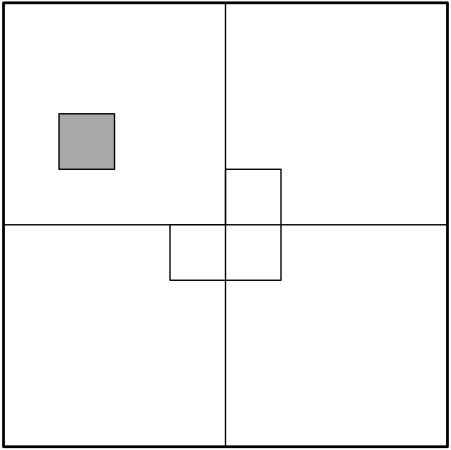
24 октября 2020 г.

Задача для затравки

Из шахматной доски 8×8 вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся часть доски можно покрыть уголками из трёх клеток.

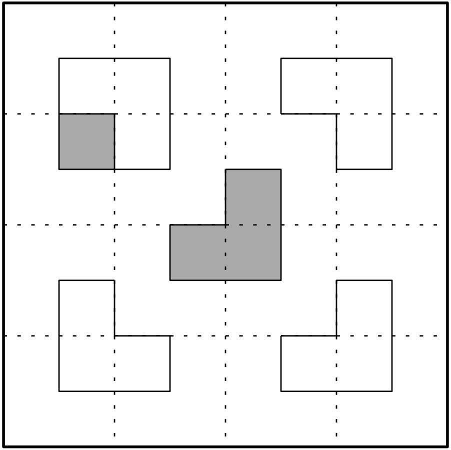
Проблема: мы не знаем, какую клетку вырезали. Неужели придётся разбирать все возможные случаи? Кстати, сколько их?

Сведение задачи к доске 4×4



Дальше — сами!

Сведение задачи к доске 2×2 и решение



Обобщение

Наш алгоритм позволяет решить аналогичную задачу для доски $2^n \times 2^n$ при любом натуральном n: где бы ни была вырезана клетка, мы делим доску на 4 квадрата $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ и вырезаем в середине уголок так, чтобы в каждом из этих квадратов было по одной вырезанной клетке. С полученными квадратами проделываем ту же процедуру *и так далее*.

Вместо *и так далее* грамотно оформлять подобные рассуждения **по индукции**. Кстати, зачастую *и так далее* просто не работает.

Метод математической индукции

Пусть надо доказать серию утверждений $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Для этого достаточно:
1) доказать утверждение P_1 (база индукции);
2) вывести из каждого утверждения P_k следующее P_{k+1} (шаг индукции), т. е. предположить, что P_k верно при каком-то k (предположение индукции) и доказать, что тогда верно P_{k+1}.

Хотя утверждений бесконечно много, каждое конкретное будет выведено за конечное число шагов: $P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_n$ (принцип домино: если первую доминошку толкнуть, то каждая доминошка повалит стоящую рядом).

Пример: сумма квадратов

Докажем, что при всех $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

База $n = 1$: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$ — верно.
Шаг $k-1 \to k$. Предположим, что при некотором $k \geqslant 2$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)k(2(k-1)+1)}{6}.$$

Добавим к обеим частям k^2. Справа имеем:

$$\frac{(k-1)k(2k-1)}{6} + k^2 = \frac{k((k-1)(2k-1)+6k))}{6} =$$

$$= \frac{k(2k^2+3k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Замечания

1. При доказательстве шага буквы переименовывать необязательно: можно использовать ту же букву n.
2. Иногда в базе нужно проверить несколько первых утверждений, а не одно.
3. Иногда при переходе надо предполагать, что верно не только предыдущее утверждение, но и все предыдущие.
4. Бывает, что переход чуть проще совершать $n-1 \to n$, чем $n \to n+1$, но, как правило, это неважно.

Задача про монеты

Докажите, что любую сумму в целое число копеек, начиная с восьми, можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек.

Решение

Достаточно разменять суммы в 8, 9 и 10 копеек. Почему?

Решение

Достаточно разменять суммы в 8, 9 и 10 копеек. Почему?

Если мы можем разменять n копеек, то сможем и $n + 3$ — добавим монету в 3 копейки (шаг индукции).

Далее $8 = 5 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$ (база индукции).

Замечание

Следуя этому решению, сумма в 100 копеек разменивается так: $5+5+\underbrace{3+\ldots+3}_{30}$. Конечно, проще заплатить 20 пятаков, но от нас не требуется приводить пример с наименьшим числом монет. (Это — задача для желающих.)

Разрезание квадрата

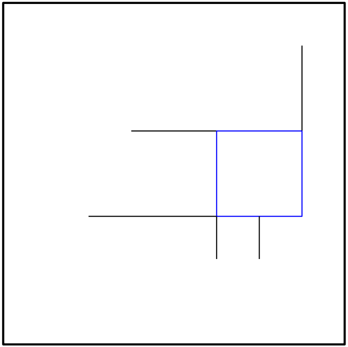
Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, начиная с 6.

Разрезание квадрата

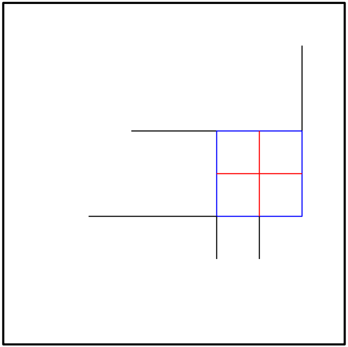
Начнём опять с шага. Пусть квадрат можно разрезать на n квадратов. Тогда и на $n+?$ тоже можно.

Разрезание квадрата

Начнём опять с шага. Пусть квадрат можно разрезать на n квадратов. Тогда и на $n+3$ тоже можно:

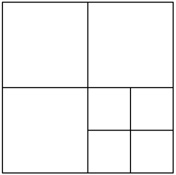


$\Longrightarrow$

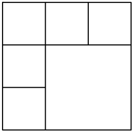


Разрезание квадрата

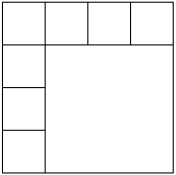
База: примеры разрезаний на 6, 7 и 8 частей:



7



6



8

Египетские дроби

Докажите, что для любого $n \geqslant 3$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей вида $\dfrac{1}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$. (Такие дроби называются египетскими или аликвотными.)

База индукции: $n = 3$. Подберите натуральные $a < b < c$ такие, что

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

База индукции

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Египетские дроби: шаг индукции

Для индукционного перехода достаточно *представить египетскую дробь в виде сумму двух египетских*. Тогда в любом представлении

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{j} + \frac{1}{k}, \text{ где } a < b < \ldots < j < k,$$

заменим наименьшую дробь суммой двух:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m}, \quad l < m,$$

и увеличим число слагаемых на одно; при этом очевидно, что $k < l < m$, так что дроби в новом разложении

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{j} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m},$$

различны.

Египетские дроби: шаг индукции

Полезно запомнить: равенство

$$\frac{1}{6} = \frac{3-2}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

обобщается:

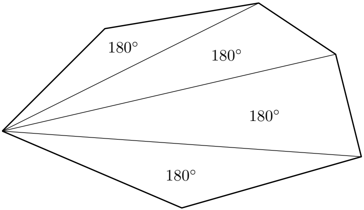
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Отсюда

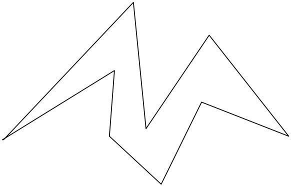
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}.$$

Пример: сумма углов n-угольника равна $180°(n-2)$

База $n = 3$: сумма углов треугольника равна $180°$.
Для выпуклого n-угольника можно без индукции: разбиваем его на $n-2$ треугольника диагоналями, выходящими из одной вершины:



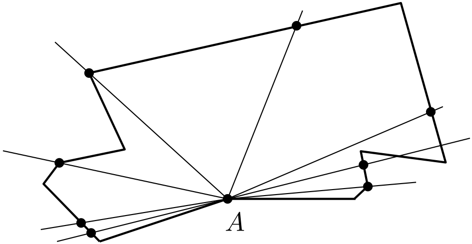
Но для невыпуклого такой вершины может не найтись:



Лемма о внутренней диагонали

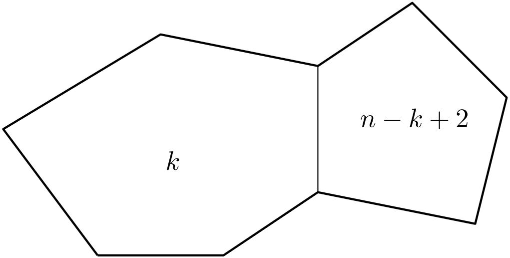
Лемма. В любом многоугольнике есть **внутренняя диагональ**.

Доказательство. В выпуклом многоугольнике любая диагональ — внутренняя. Пусть у многоугольника есть угол A, больший 180°. Рассмотрим все лучи, исходящие из A и идущие внутрь многоугольника. На каждом таком луче возьмём первую точку пересечения с границей многоугольника. Поскольку все эти точки не могут лежать на одной стороне, где-то произойдёт переход — там эта точка будет вершиной.



Пример: сумма углов n-угольника равна $180^\circ(n-2)$

Внутренняя диагональ разбивает n-угольник на два многоугольника. Если у одного из них k вершин, то у другого $n-k+2$. У обоих многоугольников вершин меньше n, поэтому применимо предположение индукии: суммы углов в них равны соответственно $180^\circ(k-2)$ и $180^\circ(n-k)$. В сумме получается $180^\circ(n-2)$.



Урок физкультуры

Физрук скомандовал детям, стоящим в шеренгу: „Нале-во!“ В эту секунду каждый школьник повернулся либо налево, либо направо. Каждую следующую секунду школьники, оказавшиеся лицом друг к другу, одновременно поворачивались кругом. Обязательно ли все дети рано или поздно перестанут крутиться?

Примеры

Обозначим школьников, смотрящих налево и соответственно направо, буквами L и R. Тогда каждую секунду буквосочетание RL меняется на LR. Вопрос, закончатся ли сочетания RL рано или поздно, независимо от начальной расстановки букв. Рассмотрим примеры:

RL $\rightarrow$ LR

RRLRL $\rightarrow$ RLRLR $\rightarrow$ LRLRR $\rightarrow$ LLRRR

RRRL $\rightarrow$?

Решение

Покажем, что рано или поздно школьники остановятся, т. е. получится слово LL...LLRR...RR (возможно, буквы только одного вида). Это можно доказать индукцией по числу букв, но можно объяснить короче и понятнее. Рассмотрим алфавитный порядок слов — как в словаре. Скажем, что слово A младше слова B, если A стоит в словаре раньше B. За каждую секунду слово становится младше, так как первое сочетание RL в нём меняется на более младшее LR. Поскольку всего существует конечное число слов, которые младше данного, то процесс остановится.

Последовательность вложенных радикалов

Докажите, что последовательность

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

ограничена сверху, т. е. что все её члены меньше некоторого числа.

Новый приём: предположим, что доказали!

Увы, мы не знаем этого *некоторого числа*. Обозначим его буквой C, а n-й член нашей последовательности через a_n, и «докажем» утверждение $a_n < C$ по индукции. Шаг основан на рекуррентной формуле

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

и имеет вид:

$$0 < a_n < C \Longrightarrow 0 < \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + C} \leqslant C.$$

Осталось подобрать $C > 0$ так, чтобы $\sqrt{2 + C} \leqslant C$ и $a_1 = \sqrt{2} < C$. Подойдёт $C = 2$, кстати, это наименьшее такое C. Итак, подставив вместо C число 2 на предыдущем слайде, мы получим доказательство неравенства $a_n < 2$.

Замечание о пределе

Поскольку

$$\sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < \ldots < 2,$$

то эта последовательность (a_n) имеет предел

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(для возрастающих ограниченных последовательностей — это точная нижняя грань). Он ищется так:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+L} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L^2 = 2 + L \Longrightarrow (L+1)(L-2) = 0 \Longrightarrow L = 2, \text{ т. к. } L > 0.$$

Обводим окружности

На плоскости нарисовано несколько окружностей, образующих связную фигуру. Докажите, что их можно обвести одним росчерком (не обводя одну линию дважды).

В чём проблема? В том, что если обходить, как угодно (беззаботно), то можно какие-то окружности пропустить.

«Доказательство»

Проведём индукцию по числу n окружностей. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть любую фигуру из $n - 1$ окружностей мы умеем обводить, и пусть нам дана фигура из n окружностей. Возьмём любую точку A пересечения окружностей и обведём одну окружность, вернувшись в A. После этого обведём фигуру из оставшихся окружностей по предположению индукции.

Где ошибка?

Ошибка

Алгоритм работает при $n = 1$ и $n = 2$. Но начиная с $n = 3$ могут быть сбои. Например, для цепи из трёх окружностей нельзя начинать со средней окружности: связность нарушится.

Формально ошибка в решении в том, что n окружностей мы начали обводить, стартуя с точки пересечения. Если в ней пересекались две окружности, то эта точка перестаёт быть точкой пересечения для фигуры из оставшихся $n - 1$ окружностей (после того, как первую окружность мы провели и забыли про неё).

Вывод: надо чётко формулировать доказываемое утверждение и не подменять его другим в процессе доказательства. Иногда его нужно скорректировать (уточнить) по сравнению с исходной формулировкой.

Правильное доказательство

Докажем более сильное утверждение: связную фигуру из n окружностей можно обвести одним росчерком, *начиная с любой точки.*

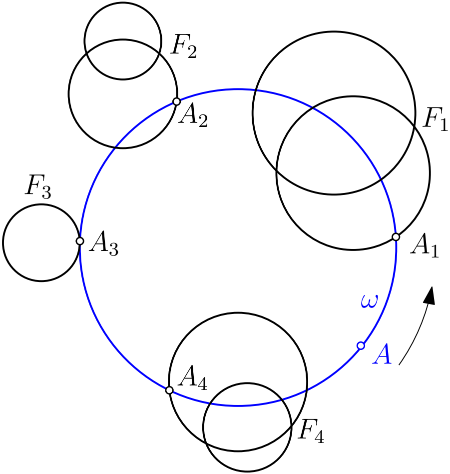
При $n = 1$ это очевидно. Пусть дано $n > 1$ окружностей и для меньшего числа окружностей всё доказано. Возьмём любую точку A на нашей фигуре F. Пусть она лежит на окружности ω. Остальные $n - 1$ окружностей образуют одну или несколько связных фигур $F_1, \ldots, F_k$, причём каждая фигура F_k имеет общую точку A_k с ω (иначе F не связна).

Каждую фигуру F_i можно обвести из точки A_i по предположению индукции.

Можно считать, что точки $A, A_1, \ldots, A_k$ идут на окружности подряд (возможно, $A = A_1$). Тогда обойдём F, начав и закончив в точке A таким образом:

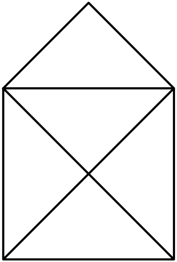
Правильное доказательство

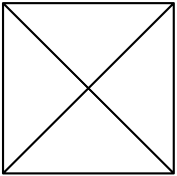
1) идём по дуге AA_1,
2) обходим фигуру F_1, возвращаясь в A_1,
3) идём по дуге A_1A_2,
4) обходим фигуру F_2, возвращаясь в A_2, и т. д.



Эйлеровы графы

Так называются графы, которые можно нарисовать на бумаге, не отрывая карандаша и не проходя дважды по одному и тому же ребру. Вот примеры двух графов: эйлерова (слева) и неэйлерова (справа):





Названы в честь Леонарда Эйлера, решившего задачу о кёнигсбергских мостах.

Критерий эйлеровости графа

Теорема. Граф эйлеров, если и только если он связный и число его нечётных вершин равно 0 или 2.

Необходимость легко показать. Достаточность доказывается аналогично задаче про окружности.