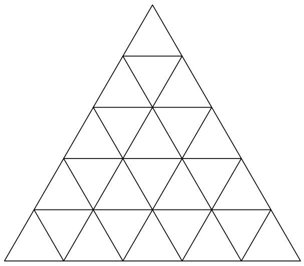
Раскраски и замощения

1. У доски 6×6 вырезали две угловые клетки на диагонали. Можно ли покрыть оставшуюся часть доминошками из двух клеток?

2. Незнайка легко замощает доску 10×10 квадратами 2×2, а вот полосками из четырёх клеток у него никак не получается. А в принципе это возможно?

3. Жук ползает по треугольнику, разбитому на 25 треугольничков, переходя между соседними треугольничками. Какое наибольшее число треугольничков он может посетить, если ни в какой из них не заходит дважды?



4. Можно ли покрыть доску 6×6 одиннадцатью полосками из трёх клеток и одним уголком из трёх клеток?

5. На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая её по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но **а)** рубашкой вверх; **б)** рубашкой вниз и вверх тормашками?

6. Можно ли шахматную доску покрыть 15 горизонтальными и 17 вертикальными доминошками? (Каждая доминошка покрывает две клетки.)

7. Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

8. На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

9. Миша и Коля сыграли в «Морской бой» по необычным правилам. Миша расставил 21 трёхпалубный корабль (прямоугольник из трёх клеток) на доске 8×8, а Коля сделал один выстрел и... промахнулся. В какую клетку он мог стрелять? Укажите все возможные варианты.

10. Можно ли покрыть доску 5×7 уголками из трёх клеток равномерно в несколько слоёв (каждая клетка должна быть покрыта одинаковым числом уголков)?

11. Задача для исследования. При каких m и n доску $m \times n$ можно покрыть уголками из трёх клеток равномерно в несколько слоёв?

Теорема Кастеляйна–Темперли–Фишера (1961). Число способов покрыть доску $2m \times 2n$ доминошками из двух клеток равно

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} 4\left(\cos^2\frac{\pi i}{2m+1}+\cos^2\frac{\pi j}{2n+1}\right).$$

Раскраски и замощения

1. Можно ли покрыть доску 6×6 одиннадцатью полосками из трёх клеток и одним уголком из трёх клеток?

2. Переполох. В каждой клетке квадрата 5×5 сидит жук. Вдруг все жуки переползли на соседние клетки (по стороне). Возможно ли, что и теперь в каждой клетке сидит по жуку?

3. Путешествие коня. Шахматный конь хочет отправиться в путешествие по шахматной доске. Может ли он пройти с поля a1 на поле h8, побывав на каждом поле ровно по одному разу?

4. На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая её по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но **а)** рубашкой вверх; **б)** рубашкой вниз и вверх тормашками?

5. Можно ли шахматную доску покрыть 15 горизонтальными и 17 вертикальными доминошками? (Каждая доминошка покрывает две клетки.)

6. Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

7. Миша и Коля сыграли в «Морской бой» по необычным правилам. Миша расставил 21 трёхпалубный корабль (прямоугольник из трёх клеток) на доске 8×8, а Коля сделал один выстрел и... промахнулся. В какую клетку он мог стрелять? Укажите все возможные варианты.