Центр масс

Малый мехмат МГУ

31 октября 2020 г.

Задача для затравки

Старый пират зарыл клад на острове среди 20 деревьев. После этого он написал завещание, в котором указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, и т. д., наконец, повернуть к двадцатому и пройти двадцатую часть расстояния до него. К сожалению, пират забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько разных ям придётся выкопать потомкам пирата, чтобы всё-таки найти клад?

Упрощённая задача

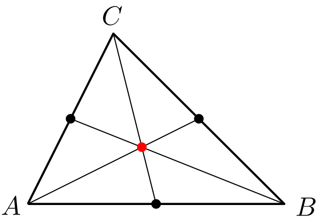
Сколько ям надо вырыть, если дерева всего два? А три?

Упрощённая задача

Если дерева два, то яма будет одна — посередине между ними.
Рассмотрим три дерева: A, B и C. Пусть для начала они не лежат на одной прямой.

Случай треугольника

Если пройти от A до середины AB, а затем — на треть расстояния до C, то мы окажемся в точке пересечения медиан $\triangle ABC$. Значит, мы в ней окажемся при любой нумерации деревьев. Итак, нужна одна яма.



Случай трёх точек на одной прямой

Пусть на прямой заданы координаты и точки A, B, C имеют координаты a, b и c.
Тогда середина отрезка AB имеет координату $\frac{a+b}{2}$. Вообще, пройти от точки x к точке y на $1/n$ расстояния между x и y — значит прибавить к x число $\frac{y-x}{n}$. Значит, пройдя от точки $\frac{a+b}{2}$ к c на треть расстояния, мы окажемся в точке

$$\frac{a+b}{2} + \frac{c - \frac{a+b}{2}}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Это — среднее арифметическое a, b и c. Оно не зависит от их порядка, так что яма будет одна.

Случай n точек на одной прямой

Пусть на прямой дано n точек (чисел) $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ и мы идём, как сказано в завещании пирата.

Докажем, что мы придём в точку $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$. В частности, результат не зависит от нумерации чисел. Индукция по n с очевидной базой $n = 2$. Случай $n = 3$ рассмотрен выше («шажок» индукции). Теперь шаг $n - 1 \to n$.

Для n точек после $(n-2)$-го действия мы окажемся по предположению индукции в точке

$$s = \frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Пройдём от s в сторону к x_n на $1/n$ часть расстояния, тогда мы окажемся в точке

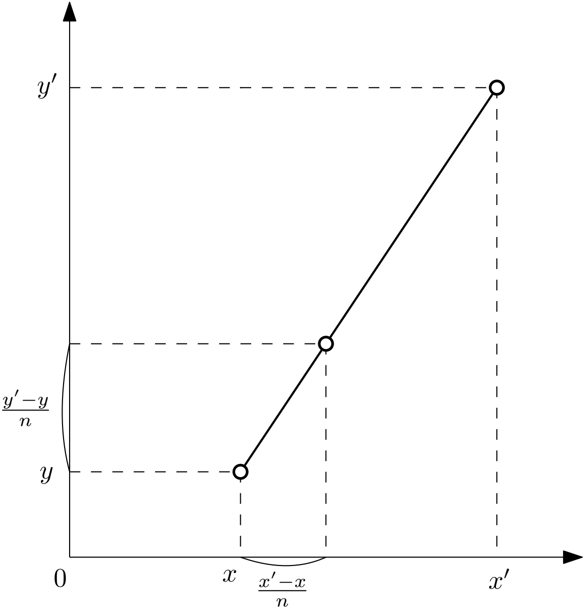
$$s + \frac{x_n - s}{n} = \frac{(n-1)s}{n} + \frac{x_n}{n} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Случай n точек на плоскости

Оказывается, этот случай полностью аналогичен, надо только оперировать не с числами, а с парами чисел: $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. (Всё происходит в некоторой системе координат.) Пройти от точки (x, y) к точке (x', y') на $1/n$ часть расстояния — значит пройти таким образом по каждой координате (следующий слайд). Поэтому понадобится одна яма — в точке

$$\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right).$$

Случай n точек на плоскости



Центр масс: координатный подход

Центр масс – аналог среднего арифметического. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — положительные числа («массы»), $A_1, \ldots, A_n$ — точки (на прямой, на плоскости или в пространстве), заданные координатами. **Центр масс** системы $\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \\ m_1 & \ldots & m_n \end{pmatrix}$ — это точка

$$\mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \\ m_1 & \ldots & m_n \end{pmatrix} = \frac{m_1 A_1 + \ldots + m_n A_n}{m_1 + \ldots + m_n}$$

(умножение точки A_i на число m_i и сложение точек $m_i A_i$ и $m_j A_j$ происходит покоординатно).

Замечания

1. Физический смысл центра масс. Пусть к точкам $A_1, \ldots, A_n$, лежащим на невесомой пластине, привязаны гирьки с массами $m_1, \ldots, m_n$. Тогда центр масс этой системы — та точка, в которую надо поставить остриё карандаша, чтобы пластина находилась в равновесии.
2. Можно допустить и отрицательные массы, но важно, чтобы $m_1 + \ldots + m_n \neq 0$.
3. На геометрическом языке операции сложения и умножения на число проводятся с векторами, а не с точками. При выборе системы координат точку A можно отождествить с вектором $\overrightarrow{OA}$.
4. Центр масс — *аффинное* понятие: оно не зависит от выбора системы координат. Например, центр масс двух точек A и B с единичными массами — это всегда середина отрезка AB.

Центр масс: векторный подход

Пусть $m_1, \ldots, m_n > 0$, $A_1, \ldots, A_n$ — точки. **Центр масс системы** $\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \\ m_1 & \ldots & m_n \end{pmatrix}$ — это такая точка M, что $m_1\overrightarrow{MA_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}$.

Теорема. Для любой системы точек центр масс существует и единственный.

Доказательство. *Существование.* Выбираем любую систему координат и пишем формулу в координатах.

Единственность. Если M_1 и M_2 — центры масс, то

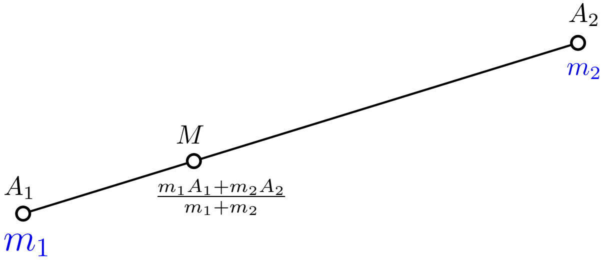
$$\left.\begin{aligned} m_1\overrightarrow{M_1A_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{M_1A_n} &= \overrightarrow{0} \\ m_1\overrightarrow{M_2A_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{M_2A_n} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{0} = m_1\left(\overrightarrow{M_1A_1} - \overrightarrow{M_2A_1}\right) + \ldots + m_n\left(\overrightarrow{M_1A_n} - \overrightarrow{M_2A_n}\right) =$$

$$= (m_1 + \ldots + m_n)\overrightarrow{M_1M_2} \Longrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow M_1 = M_2.$$

Правило рычага

Теорема. Центр масс системы $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ лежит на отрезке A_1A_2 и делит его в отношении $m_2 : m_1$, считая от вершины A_1 (отношение масс обратно пропорционально отношению плеч).



Действительно, это такая точка M, что

$$m_1\overrightarrow{MA_1} = -m_2\overrightarrow{MA_2}.$$

Группировка масс

Теорема.
Пусть $M = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & B_1 & \dots & B_k \\ m_1 & \dots & m_n & p_1 & \dots & p_k \end{pmatrix}$,
$B = \mathbf{C}\begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_k \\ p_1 & \dots & p_k \end{pmatrix}$. Тогда
$M = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & B \\ m_1 & \dots & m_n & p_1 + \dots + p_k \end{pmatrix}$. Иначе говоря, если в некоторой системе заменить часть точек на их центр масс и поместить туда массу, равную сумме масс исходных точек, то центр масс всей системы не изменится.

Доказательство

Выбрав систему координат и отождествив точки с наборами их координат, получим:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & B \\ m_1 & \ldots & m_n & p_1+\dots+p_k \end{pmatrix} &= \\
= \mathbf{C}\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & \frac{p_1B_1+\ldots+p_kB_k}{p_1+\ldots+p_k} \\ m_1 & \ldots & m_n & p_1+\dots+p_k \end{pmatrix} &= \\
= \frac{m_1A_1+\ldots+m_nA_n+(p_1+\ldots+p_k)\cdot\frac{p_1B_1+\ldots+p_kB_k}{p_1+\ldots+p_k}}{m_1+\ldots+m_n+(p_1+\ldots+p_k)} &= \\
= \frac{m_1A_1+\ldots+m_nA_n+p_1B_1+\ldots+p_kB_k}{m_1+\ldots+m_n+p_1+\ldots+p_k} &= M.
\end{aligned}
$$

Теорема о медианах треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.
Доказательство. Положим в вершины $\triangle ABC$ единичные массы и найдём центр масс группировкой: положим в середину BC массу 2, тогда

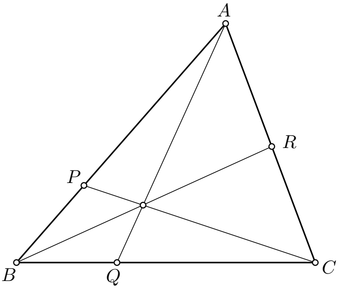
$$\mathbf{C}\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A & \frac{B+C}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

По правилу рычага эта точка лежит на медиане AA_1 и делит её в отношении $2:1$, считая от вершины A.
Но точно такое же рассуждение верно для любой медианы (можно сгруппировать любые две из трёх масс). Значит, центр масс лежит на каждой медиане и делит её в указанном отношении.

Чевианы

Биссектрисы треугольника тоже пересекаются в одной точке.

Рассмотрим общую ситуацию. Пусть на сторонах $\triangle ABC$ взяты точки P, Q, R.

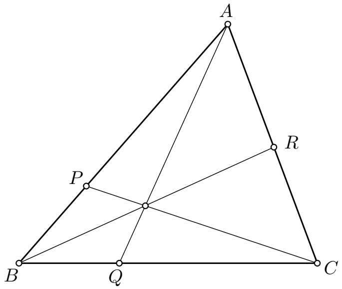


При каком условии отрезки AP, BQ, CR пересекаются в одной точке? В этом случае они называются **чевианами** $\triangle ABC$ по имени итальянского инженера Джованни Чевы (1647–1734), доказавшего следующую теорему.

Теорема Чевы

Отрезки CP, AQ и BR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

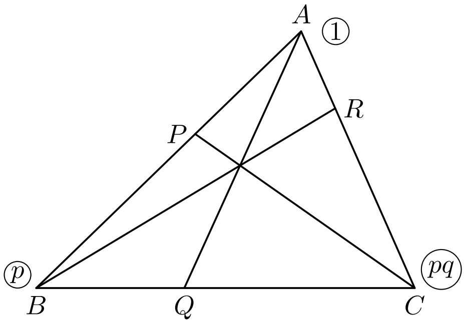
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$



Доказательство теоремы Чевы

Пусть $AP : PB = p$, $BQ : QC = q$, $CR : RA = r$. Предположим, что $pqr = 1$ и докажем, что отрезки AQ, BR и CP пересекаются в одной точке, а именно в

$$K = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & p & pq \end{pmatrix}.$$

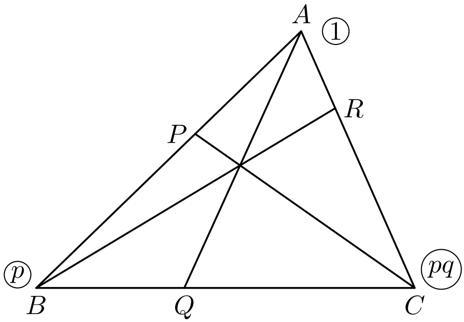


Доказательство теоремы Чевы

Действительно, по теореме о группировке масс

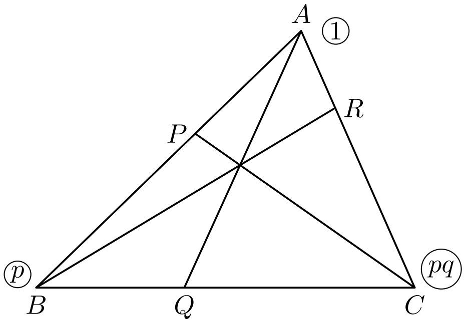
$$K = \mathbf{C}\begin{pmatrix} P & C \\ 1+p & pq \end{pmatrix} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A & Q \\ 1 & p+pq \end{pmatrix} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} R & B \\ pq+1 & p \end{pmatrix},$$

поэтому точка K лежит на каждом из отрезков AQ, BR и CP (из правила рычага).



Доказательство теоремы Чевы

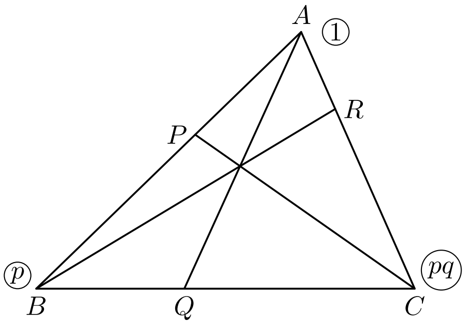
Обратно, пусть эти отрезки пересекаются в одной точке. Рассмотрим на стороне AC такую точку R', что $CR' : R'A = 1 : pq$. Поскольку $p \cdot q \cdot \frac{1}{pq} = 1$, отрезки CP, BR' и AQ пересекаются в одной точке (в силу доказанного ранее). Значит, $R' = R$, откуда
$r = CR : RA = CR' : R'A = 1 : pq$, т. е. $pqr = 1$.



Теорема Ван-Обеля

Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки P, Q и R так, что отрезки CP, AQ и BR пересекаются в точке K. Тогда

$$\frac{AK}{KQ} = \frac{AP}{PB} + \frac{AR}{RC}.$$



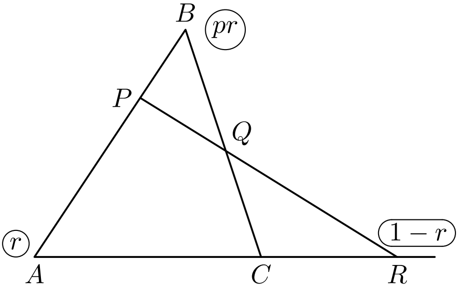
Докажите самостоятельно, используя те же массы, что и в теореме Чевы.

Теорема Менелая

Пусть на сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки P и Q, а на продолжении стороны AC за точку C — точка R. Тогда точки P, Q и R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

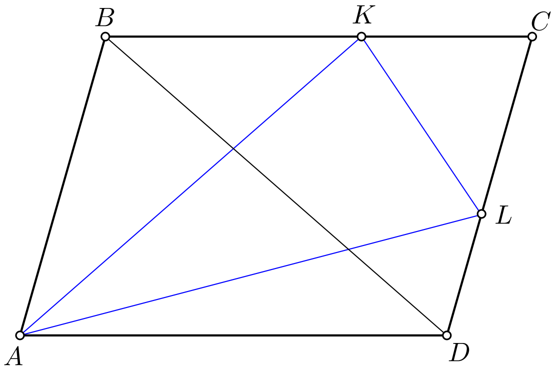
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$

Указание. Обозначьте $p = AP : PB$, $q = BQ : QC$, $r = CR : RA$ и расставьте массы, как на рисунке.



Задача

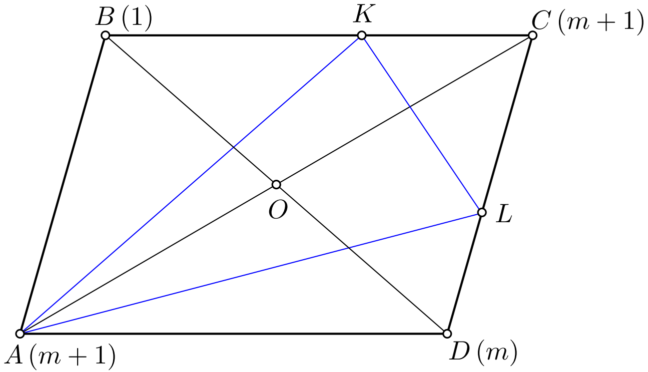
На сторонах BC и CD паралеллограмма $ABCD$ взяты точки K и L так, что $BK : KC = CL : LD$. Докажите, что точка пересечения медиан $\triangle AKL$ лежит на диагонали BD.



Решение

Пусть $BK : KC = CL : LD = m$. Разложим в вершины подходящие массы:

$$M = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ m+1 & 1 & m+1 & m \end{pmatrix}$$



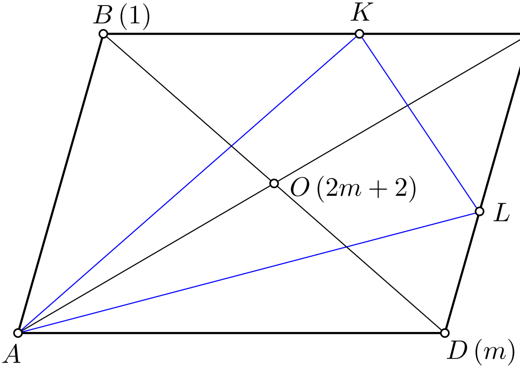
Сгруппируем двумя способами.

Первая группировка

Сгруппируем A с C. Пусть O — середина AC. Имеем:

$$\mathbf{C}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ m+1 & 1 & m+1 & m \end{pmatrix} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} O & B & D \\ 2m+2 & 1 & m \end{pmatrix} \in BD$$

так как все три точки O, B и D лежат на BD.

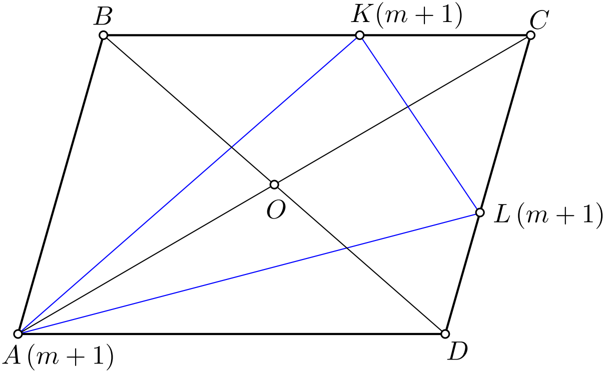


Вторая группировка

Сгруппируем C частично с B, частично с D:

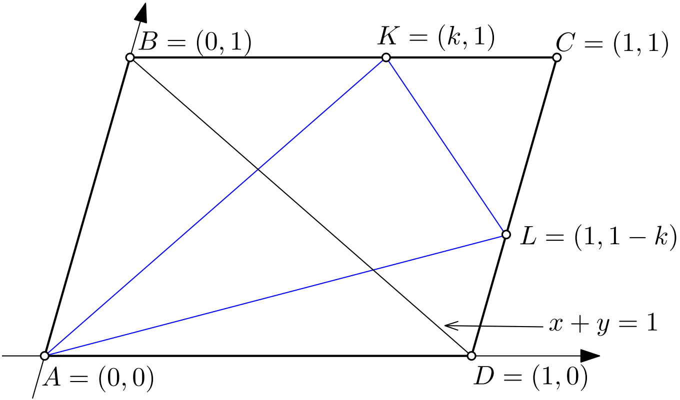
$$\mathbf{C}\begin{pmatrix} A & B & C & C & D \\ m+1 & 1 & m & 1 & m \end{pmatrix} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} A & K & L \\ m+1 & m+1 & m+1 \end{pmatrix}$$

— точка пересечения медиан $\triangle AKL$.



Другое решение

Выберем **косоугольную систему координат**, направив оси по сторонам параллелограмма и выбрав на каждой свой масштаб.



Имеем: $B = (0, 1)$, $D = (1, 0)$, поэтому уравнение прямой BD: $x + y = 1$, причём $0 \leqslant x \leqslant 1$ для точек отрезка BD.

Другое решение

Пусть $K = (k, 1)$. Так как $BK : KC = CL : LD$, то $L = (1, 1 - k)$. Точка пересечения медиан $\triangle AKL$ имеет координаты

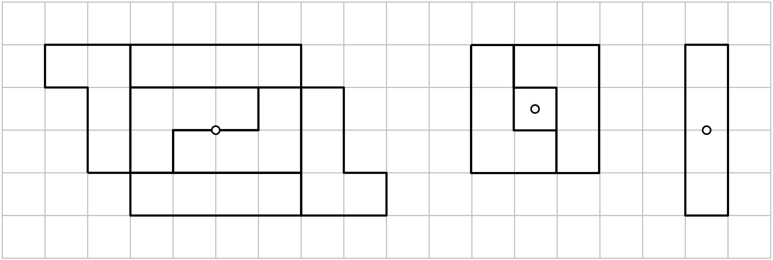
$$\left(\frac{x_A + x_K + x_L}{3}, \frac{y_A + y_K + y_L}{3}\right) = \left(\frac{k+1}{3}, \frac{1+(1-k)}{3}\right)$$

и поэтому лежит на отрезке BD, так как

$$\frac{k+1}{3} + \frac{1+(1-k)}{3} = 1 \text{ и } 0 < \frac{k+1}{3} < 1 \ \ (\Leftarrow 0 < k < 1).$$

Задача

Центрально симметричная фигура на клетчатой бумаге состоит из n «уголков» и k прямоугольников 1×4 (примеры на рисунке). Докажите, что n чётно.



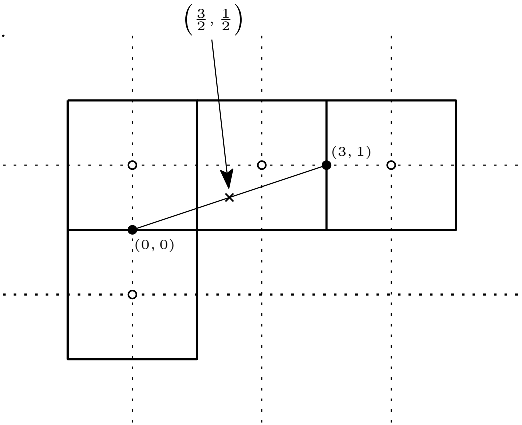
Решение

1. Чтобы говорить о центре масс конечного множества точек, рассмотрим центры клеток нашей фигуры и поместим в них массы $1/4$. Это множество M точек имеет тот же центр симметрии O, что и вся фигура, причём O — центр масс множества M (при центральной симметрии относительно O множество M переходит в себя, а значит, и его центр масс переходит в себя, поэтому он совпадает с O).

2. Введём систему координат, взяв начало в любом узле и приняв сторону клетки за 2. Тогда все узлы сетки будут иметь чётные координаты, а центры клеток — нечётные координаты. Точка O — это середина любого отрезка с симметричными концами из M, поэтому координаты точки O — полусуммы нечётных чисел, т. е. целые числа (возможны три случая: O — либо узел, либо середина стороны клетки, либо центр клетки).

Решение

3. Сгруппируем массы по фигуркам. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — центры масс прямоугольников, $B_1, \ldots, B_n$ — центры масс уголков. Все точки A_i имеют целые координаты. Определим положение центра масс уголка.



Решение

4. Центр масс O всей системы есть

$$\frac{A_1 + \ldots + A_k + B_1 + \ldots + B_n}{k + n}$$

— точка с целыми координатами. Координаты точек A_i — целые, а координаты точек B_j — полуцелые, поэтому последних должно быть чётное количество.