Комплексные числа

Малый мехмат МГУ

Задача для затравки

Докажите, что произведение двух чисел, представимых в виде суммы двух полных квадратов, тоже представимо в таком виде:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (\dots)^2 + (\dots)^2.$$

Чего-то не хватает

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 + b^2 = ? \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

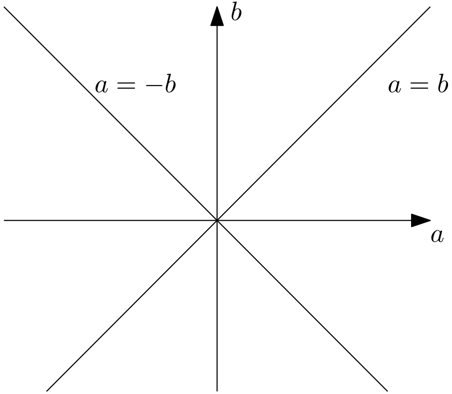
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Задача

Объясните, почему выражение $a^2 + b^2$ не раскладывается на множители с действительными коэффициентами.

Идея

Если квадратный многочлен раскладывается, то на два линейных множителя, каждый из них обнуляется на прямой. Например:



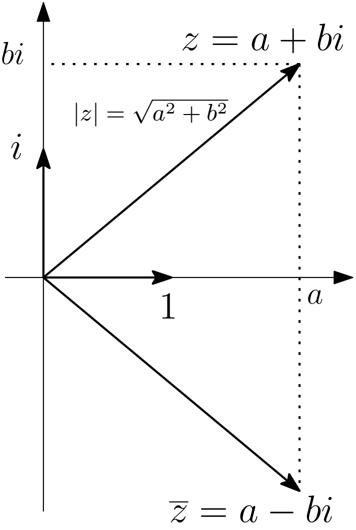
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 0 \iff a = \pm b$$

Решение

Если $a^2 + b^2$ раскладывается над $\mathbb{R}$ нетривиальным образом, то оба множителя — однородные линейные, т. е. имеют вид $\lambda a + \mu b$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, причём λ и μ не равны 0 одновременно. Но такое выражение обнуляется на целой прямой, в то время как $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Начальные сведения о комплексных числах

Комплексные числа — это «числа» (записи) вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.
Для $z = a + bi$ определены:
$\mathrm{Re}\, z = a$ — действительная часть,
$\mathrm{Im}\, z = b$ — мнимая часть,
$\bar{z} = a - bi$ — сопряжённое число,
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль.



Числовые множества

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Попробуйте определить сложение и умножение комплексных чисел:

$(a + bi) + (c + di) =?$

$(a + bi)(c + di) =?$

Операции над комплексными числами

$$(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)i$$
$$(a+bi)(c+di) = ac-bd+(ad+bc)i$$

Упражнения

$$(2+i)(3-i) =$$

$$i^5 =$$

$$\frac{1}{i} =$$

$$\frac{1+2i}{1-i} =$$

Сумма квадратов

С появлением мнимой единицы сумму квадратов удаётся разложить:

$$\boxed{a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi).}$$

Важное следствие: всякое ненулевое комплексное число $a + bi$ обратимо:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Свойства сопряжения и модулей

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w};$$

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w};$$

$$|zw| = |z||w|$$

Вернёмся к задаче

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) =$$
$$= (a+bi)(c+di)\cdot(a-bi)(c-di) =$$
$$= (ac-bd+(ad+bc)i)(ac-bd-(ad+bc)i) =$$
$$= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

Примеры: разложение многочленов на множители

а) $x^4 + 1$;
б) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
в) $x^6 + x^3 + 1$.

Разложение а)

$$x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 =$$
$$= \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right).$$

Разложение б)

Для разложения $x^4+x^3+x^2+x+1$ удобно разделить на x^2 и сделать замену $y=x+\frac{1}{x}$:

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{y}-1=$$

$$=\left(y-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(y+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

Вернёмся к x: $x^4+x^3+x^2+x+1=$
$\left(x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+1\right)$.

Разложение в), без комментариев

$$x^6 + x^3 + 1 = \left(x^2 - 2\cos 20^\circ x + 1\right) \times$$
$$\times \left(x^2 - 2\cos 40^\circ x + 1\right) \left(x^2 - 2\cos 80^\circ x + 1\right)$$

Каждый раз мы использовали тот или иной трюк. Но на самом деле все три разложения можно получить стандартными методами, используя комплексные числа.

Упражнения

Решите уравнения:

а) $\overline{z} = z$;

б) $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$;

в) $\overline{z^2} = z$.

Квадратные корни из комплексных чисел

Квадратным корнем из числа $w \in \mathbb{C}$ называется множество всех комплексных корней уравнения $z^2 = w$:

$$\sqrt{w} := \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = w\}.$$

Отличие от случая действительных чисел: действительный $\sqrt{a}$ (для $a \in \mathbb{R}$) существует, только если$a \geqslant 0$ и определяется как неотрицательный корень уравнения $x^2 = a$.

Квадратные корни из комплексных чисел: примеры

$\sqrt{0} = \{0\}$.

$\sqrt{1} = \{1, -1\}$ в $\mathbb{C}$, т. к.
$x^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$\sqrt{-1} = \{i, -i\}$, т. к. $x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$

Задача: вычислите $\sqrt{i}$.

Пример: $\sqrt{i}$

$$(x+yi)^2 = i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1\,(\Rightarrow x \text{ и } y \text{ одного знака}) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Итак, $\sqrt{i} = \left\{\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\}$

Аналогично можно вывести формулу для $\sqrt{w}$ для любого $w \in \mathbb{C}$. При $w \neq 0$ есть два противоположных значения корня $\sqrt{w}$.

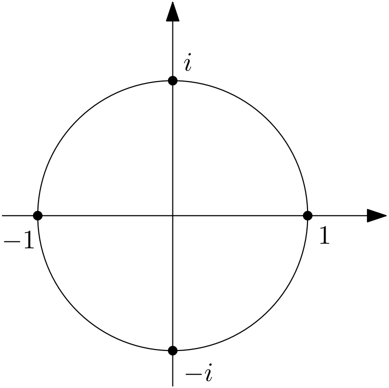
Корни высших степеней

Корнем степени n из числа $w \in \mathbb{C}$ называется множество всех комплексных корней уравнения $z^n = w$:

$$\sqrt[n]{w} := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = w\}.$$

Пример: $\sqrt[4]{1}$

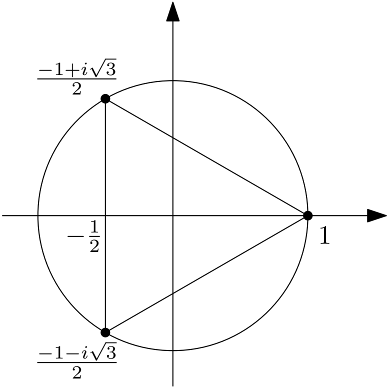
$$x^4 = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i) = 0$$



$$\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$$

Пример: $\sqrt[3]{1}$

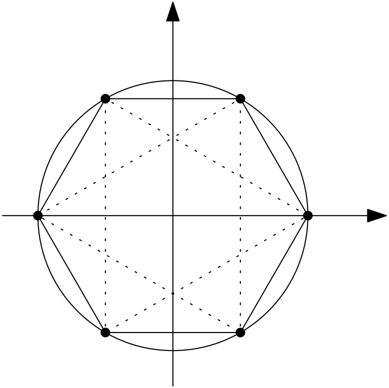
$$x^3 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \tfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$



$$\sqrt[3]{1} = \left\{1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Пример: $\sqrt[6]{1}$

$$x^6 = 1 \Leftrightarrow (x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow (\pm x)^3 = 1$$



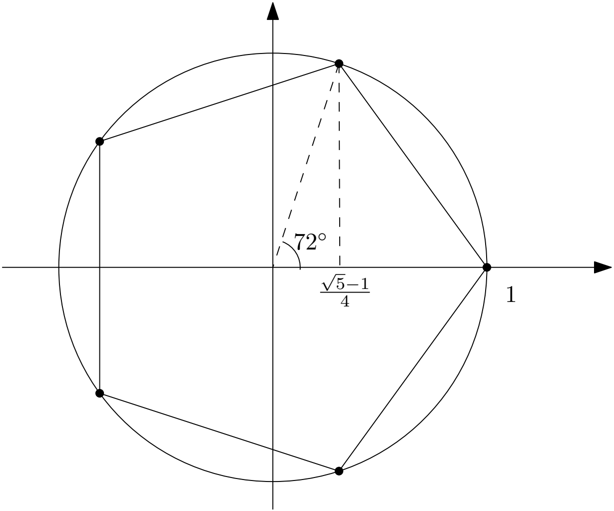
$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[3]{1} \cup \left(-\sqrt[3]{1}\right)$$

Задача: $\sqrt[5]{1}$

Докажите, что здесь получается правильный пятиугольник.

1) Используйте разложение $x^4+x^3+x^2+x+1$ выше.

2) Докажите, что $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.



Теорема

При $0 \neq w \in \mathbb{C}$ корень $\sqrt[n]{w}$ принимает n значений, лежащих в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|w|}$ с центром в нуле.

Для доказательства нужна тригонометрия и геометрический смысл умножения на комплексное число.

Два философских вопроса

Умножение положительных чисел имеет ясный геометрический смысл — площадь прямоугольника.
Есть ли какой-то смысл у равенств

$$(-1)(-1) = 1 \quad \text{и} \quad i \cdot i = -1?$$

Или так просто захотели математики?

Ответ на первый вопрос

Умножение на -1 — это взятие противоположного числа, т. е. отражение относительно 0:

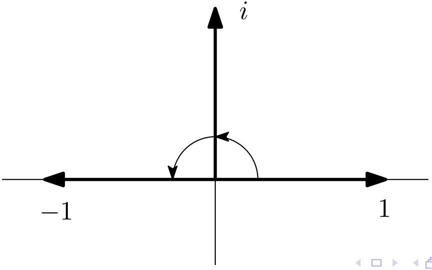
$$-1 \cdot x = -x.$$

Поэтому повторное умножение на -1 возвращает любое число на прежнее место:

$$(-1) \cdot (-1) \cdot x = -(-x) = x.$$

Ответ на второй вопрос

Какому преобразованию соответствует умножение на i? Повторное умножение на i приводит к умножению на -1, т. е. центральной симметрии или, если выйти в плоскость, к повороту на 180°. Логично предположить, что умножению на i соответствует поворот на 90°: если два раза повернём на прямой угол, в итоге повернём на 180°.



Продолжение следует ...