

Плоские графы

Задача 1. Нарисуйте карту из четырёх стран, в которой любые две страны граничат друг с другом. Каждая страна должна быть связной, т.е. всю её территорию можно объехать, не выезжая за её пределы.

Задача 2. Можно ли расположить на плоскости 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 4 отрезка?

Граф называется *плоским*, если его можно изобразить на плоскости так, что его рёбра не пересекаются и вершины не совпадают. При этом также не допускается, чтобы ребро, соединяющее две вершины, проходило «транзитом» через третью. Плоский граф разбивает плоскость на несколько областей, называемых *гранями*.

Граф называется *связным*, если любые две вершины соединены путём по рёбрам этого графа.

Задача 3. Пусть у плоского связного графа число вершин равно V , число рёбер — P ; пусть число граней, на которые граф разбивает плоскость, равно G ; пусть $\mathcal{E} = V - P + G$.

а) Из графа убрали висющую вершину (т.е. вершину степени 1) и ведущее к ней ребро (рис. 1). Как изменились значения V , P , G , $\mathcal{E}$?

б) Из графа убрали ребро, разделяющее две грани (рис. 2). Как изменились V , P , G , $\mathcal{E}$?

в) *Формула Эйлера.* Чему может быть равно значение $\mathcal{E}$ для плоского связного графа?

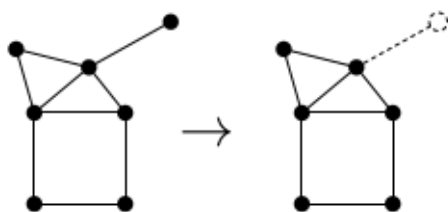


Рис. 1

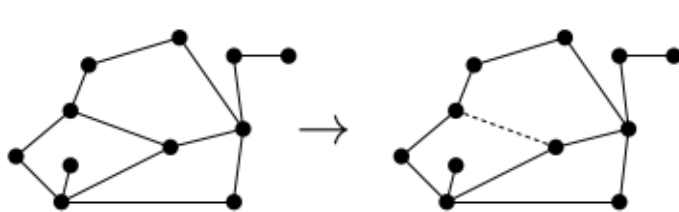


Рис. 2

Задача 4. В стране Озёрная 7 озёр, соединённых между собой 10 каналами, причём от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

Задача 5. Футбольный мяч шьют из чёрных пятиугольников и белых шестиугольников, при этом в каждой вершине сходится по три лоскута. Сколько чёрных пятиугольников используется при изготовлении футбольного мяча?

Задача 6. Регионы некоторой страны можно окрасить в два цвета так, что соседние (имеющие общий участок границы) регионы будут иметь разные цвета. Один из регионов называется «столичный округ» и имеет особый статус; остальные называются *областями*. Известно, что у каждой области число соседних регионов кратно трём. Докажите, что то же верно и для столичного округа.