Малый мехмат МГУ **8 класс. Группа «А»** **17 апреля 2021 г.**

Плоские графы

Граф называется *плоским,* если его можно изобразить на плоскости так, что его рёбра не пересекаются и вершины не совпадают. При этом также не допускается, чтобы ребро, соединяющее две вершины, проходило «транзитом» через третью. Плоский граф разбивает плоскость на несколько областей, называемых гранями.

Граф называется *связным,* если любые две вершины соединены путём по рёбрам этого графа.

Задача 1. Пусть у плоского связного графа число вершин равно В, число рёбер — Р; пусть число граней, на которые граф разбивает плоскость, равно Г; пусть Э = В − Р + Г.

а) Из графа убрали висячую вершину (т.е. вершину степени 1) и ведущее к ней ребро (рис. 1). Как изменились значения В, Р, Г, Э?

б) Из графа убрали ребро, разделяющее две грани (рис. 2). Как изменились В, Р, Г, Э?

в) *Формула Эйлера.* Чему может быть равно значение Э для плоского связного графа?

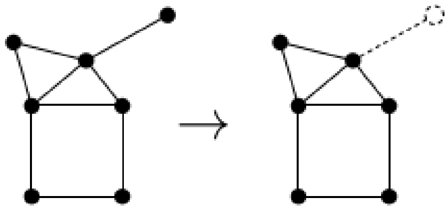


Рис. 1

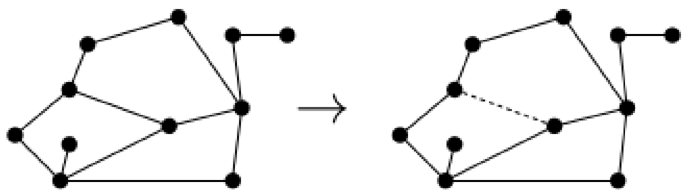


Рис. 2

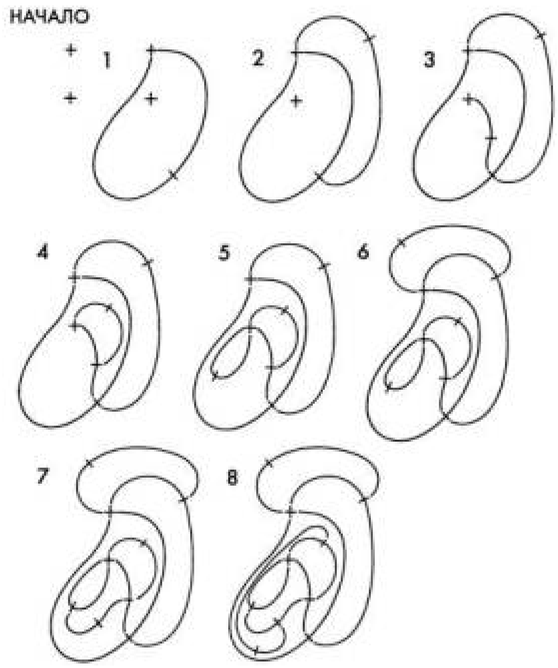
Задача 2. а) Пусть у плоского связного графа Г $\geqslant 2$ и в этом графе нет петель и кратных рёбер. Докажите, что Р $\geqslant {}^3\!/_2\,$Г. **б)** В тех же условиях докажите, что Р $\leqslant$ 3В − 6.

в) В графе K_5 пять вершин, и каждая вершина соединена с каждой. Докажите, что K_5 — не плоский граф.

Задача 3. а) Постройте плоский граф (без петель и кратных рёбер), степени всех вершин которого в точности равны 5. **б)** Могут ли в плоском графе степени всех вершин быть > 5?

в) Докажите, что вершины любого плоского графа можно раскрасить в шесть цветов так, чтобы вершины, соединённые ребром, были окрашены в разные цвета.

Задача 4. *Теорема о пяти красках.* Докажите, что вершины любого плоского графа можно раскрасить в пять цветов так, чтобы вершины, соединённые ребром, были окрашены в разные цвета.



Задача 5. *Игра «Брюссельская капуста».* Вначале на плоскости отмечено несколько крестиков. Два игрока ходят по очереди. Ход игры состоит в продлении любого свободного окончания крестика линией, которая заканчивается другим таким свободным окончанием (того же самого или другого крестика). Пересекать ранее нарисованные линии запрещено. После этого в произвольном месте нарисованной линии создаётся новый крестик (одна из перекладин которого уже «занята» только что нарисованной линией, а другая свободна). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет, если изначально было 5 крестиков?

Задача 6. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо «красный», либо «синий» граф не является плоским.