

*Раскраски и замощения*

8. На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).
9. У Игоря и Вали есть по белому квадрату  $8 \times 8$ , разбитому на клетки  $1 \times 1$ . Они закрасили по одинаковому числу клеток на своих квадратах в синий цвет. Докажите, что удастся так разрезать эти квадраты на доминошки  $2 \times 1$ , что и из доминошек Игоря и из доминошек Вали можно будет сложить по квадрату  $8 \times 8$  с одной и той же синей картинкой.
10. Петя раскрасил каждую клетку квадрата  $1000 \times 1000$  в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник  $\Phi$ , что при любом способе положить его по границам клеток на раскрашенный квадрат, все 10 накрытых им клеток будут разного цвета. Обязательно ли  $\Phi$  — прямоугольник?