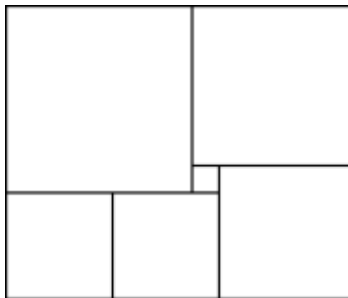


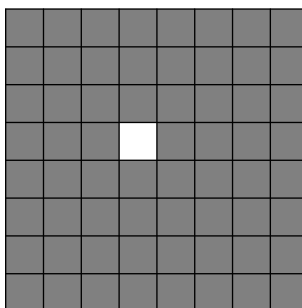
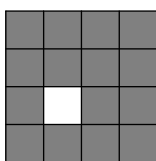
В ожидании индукции

1. Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. рисунок). Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



2. Клетки доски **а)** 2×10 ; **б)** 4×10 ; **в)** 2020×2020 раскрашены в 4 цвета так, что в каждом квадратике 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что все угловые клетки доски разноцветны.

3. **а)** Из доски 4×4 вырезали одну из центральных клеток (на рисунке слева). Разрежьте остаток на трёхклеточные уголки. **б)** Та же задача для доски 8×8 с вырезанной клеткой, изображённой на рисунке справа.

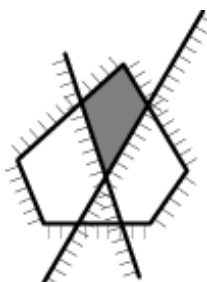


в) Теперь пусть из доски 8×8 вырезали некоторую произвольно взятую клетку. Докажите, что и теперь остаток можно разрезать на трёхклеточные уголки, независимо от того, какую клетку вырезали. **г)** Та же задача для доски 32×32 .

4. Существует ли **а)** пятизвенная; **б)** десятизвенная; **в)** 2020-звенная замкнутая ломаная, каждое звено которой пересекается ровно с двумя другими?

5. Докажите, что квадрат можно разрезать на n меньших квадратов (не обязательно одинаковых) при любом $n \geq 6$.

6. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растёт щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы у одной из частей вся борода окажется снаружи.



7. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в нём. Оказалось, что все места заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может поменять местами **а)** двух произвольных зрителей; **б)** соседей, если они оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?