Малый мехмат МГУ **8 класс. Группа «А»** **26 сентября 2020 г.**

Простые и составные числа

Натуральное число, имеющее ровно два делится (себя и единицу), называется *простым*, а имеющее больше двух делителей, — *составным*. Единица не считается простым числом.

Теорема Евклида. *Простых чисел бесконечного много.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $p_1, \dots, p_n$ — все простые числа. Возьмём любой простой делитель числа $p_1 \dots p_n + 1$ (наименьший делитель, больший единицы). Он отличен от $p_1, \dots, p_n$. Противоречие.

Основная теорема арифметики. *Каждое натуральное число однозначно раскладывается на простые множители.*

1. а) Числа p, $p+2$ и $p+4$ простые. Найдите p. **б)** Числа p и p^2+2 простые. Найдите p.

2. Чтобы выяснить, является число 1641 простым, его последовательно делят его на $2, 3, 5$ и т. д. На каком числе можно остановиться? (Не требуется выяснять, простое ли оно.)

3. а) Является ли простым число $4^{2020} - 1$? **б)** А $2^{2020} - 1$?

4. У числа 6 четыре делителя: $1, 2, 3, 6$. Сколько делителей у числа $1001^{11} \cdot 11^{1001}$?

5. Вычеркните из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$ один из факториалов так, чтобы оставшееся произведение было полным квадратом. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ — факториал числа n.)

6. Докажите *теорему Софи Жермен:* число $n^4 + 4$ составное для всех натуральных $n > 1$.

7. а) В Стране Загадочных Степеней жители знают только числа $1, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ и считают, как обычно, что a делится на b, если $a = bc$ для некоторого c. Простые числа определяются тоже стандартным образом. Верна ли в этой стране основная теорема арифметики?

б) Тот же вопрос для Страны Загадочного Шага, в которой жители знают только числа $1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$