Малый мехмат МГУ, 7 класс, группа «А» **9 ноября 2019 года**

Думай, доказывай, аргументируй

Задача 1. По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

Задача 2. Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех — Аня, меньше всех — Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова: если слово есть у двух игроков, за него каждому из них даётся 1 очко, у одного игрока — 2 очка тому, кто его написал, а слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех — Аня?

Задача 3. В стране есть несколько городов. Сумасшедший путешественник едет из города А в самый далёкий от него город В. Затем едет в самый далёкий от В город С и т.д. Докажите, что если город С не совпадает с городом А, то путешественник никогда не вернётся обратно в город А.

Задача 4. Антон, Боря и Вова участвовали в велопробеге по шоссе Каргополь — Медвежьегорск. Они стартовали в разное время и каждый ехал с постоянной скоростью: Антон — быстрее Бори, а Боря — быстрее Вовы. В некоторых точках шоссе были установлены видеокамеры. Каждая из них фиксировала порядок прохождения участниками этой точки. Оказалось, что любой порядок, в котором могли проехать Антон, Боря и Вова, был реализован в какой-то из точек. Известно, что кто-то один из троих падал. Кто именно?

Задача 5. На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой (точек каждого цвета не менее трех). Докажите, что можно найти треугольник с одноцветными вершинами, на трех сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

Задача 6. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 грамм разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

Задача 7. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

Малый мехмат МГУ, 7 класс, группа «А» **9 ноября 2019 года**

Дополнительные задачи

Задача 8. Компьютеры №1, №2, №3, ..., №100 соединены в кольцо (первый со вторым, второй с третьим, ... , сотый с первым). Хакеры подготовили 100 вирусов, занумеровали их и в различное время в произвольном порядке запускают каждый вирус на компьютер, имеющий тот же номер. Если вирус попадает на незаражённый компьютер, то он заражает его и переходит на следующий в цепи компьютер с большим номером до тех пор, пока не попадёт на уже заражённый компьютер (с компьютера №100 вирус переходит на компьютер №1). Тогда вирус погибает, а этот компьютер восстанавливается. Ни на один компьютер два вируса одновременно не попадают. Сколько компьютеров будет заражено после того как все 100 вирусов совершат атаку?

Задача 9. Можно ли поставить в ряд все натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы каждые два соседних числа отличались либо на 2, либо в два раза?

Задача 10. Можно ли расставить числа 1, 2, ..., 50 в вершинах и серединах сторон правильного 25-угольника так, чтобы сумма трёх чисел, стоящих в концах и середине каждой стороны, была для всех сторон одинаковой?

Малый мехмат МГУ, 7 класс, группа «Б» **9 ноября 2019 года**

Думай, доказывай, аргументируй

Задача 1. По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

Задача 2. Можно ли квадрат разрезать на 9 квадратов и раскрасить их так, чтобы получились 1 белый, 3 серых и 5 чёрных квадратов, причём одноцветные квадраты были бы равны, а разноцветные квадраты – не равны?

Задача 3. 8 грибников собрали 37 грибов. Известно, что никакие двое не собрали грибов поровну и каждый нашёл хотя бы один гриб. Докажите, что какие-то двое из них собрали больше, чем какие-то пятеро.

Задача 4. Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех — Аня, меньше всех — Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова: если слово есть у двух игроков, за него каждому из них даётся 1 очко, у одного игрока — 2 очка тому, кто его написал, а слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех — Аня?

Задача 5. Среди любых десяти из шестидесяти ребят найдутся трое одноклассников. Докажите, что среди всех них найдутся 15 одноклассников.

Задача 6. В стране есть несколько городов. Сумасшедший путешественник едет из города А в самый далёкий от него город В. Затем едет в самый далёкий от В город С и т.д. Докажите, что если город С не совпадает с городом А, то путешественник никогда не вернётся обратно в город А.

Задача 7. Антон, Боря и Вова участвовали в велопробеге по шоссе Каргополь — Медвежьегорск. Они стартовали в разное время и каждый ехал с постоянной скоростью: Антон — быстрее Бори, а Боря — быстрее Вовы. В некоторых точках шоссе были установлены видеокамеры. Каждая из них фиксировала порядок прохождения участниками этой точки. Оказалось, что любой порядок, в котором могли проехать Антон, Боря и Вова, был реализован в какой-то из точек. Известно, что кто-то один из троих падал. Кто именно?

Малый мехмат МГУ, 7 класс, группа «Б» **9 ноября 2019 года**

Дополнительные задачи

Задача 8. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 грамм разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

Задача 9. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

Задача 10. Можно ли поставить в ряд все натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы каждые два соседних числа отличались либо на 2, либо в два раза?