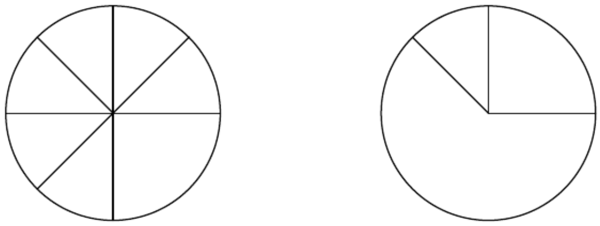
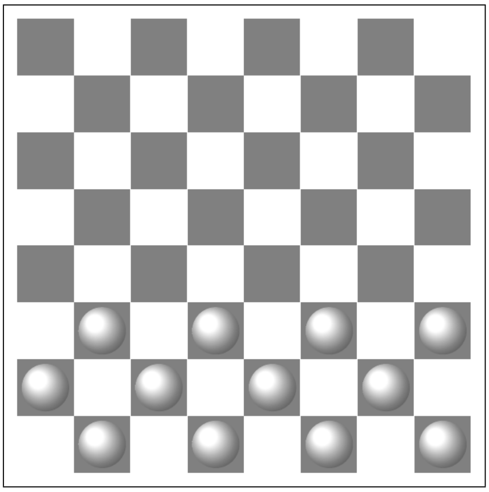
Зимний разнобой



Задача 1. На вертикальную ось надели несколько колёс со спицами. Вид сверху изображён на рисунке слева. После этого колёса повернули. Новый вид сверху — на рисунке справа. Какое наименьшее число колёс могло быть?

Задача 2. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 весёлых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в разных направлениях. Докажите, что чижи не смогут собраться на одном дереве.



Задача 3. Дана квадратная доска **а)** 4×4; б) 5×5. В одной из её клеток стоит плюс, в остальных стоят минусы. За один ход можно поменять все знаки в одной строке либо в одном столбце на противоположные. Докажите, что невозможно все знаки сделать плюсами.

Задача 4. Двенадцать шашек расположены на чёрных полях первых трёх горизонталей доски 8×8 (как показано на рисунке). Они начинают бить друг друга по обычному правилу, перепрыгивая друг через друга по диагонали (можно назад), но обычных ходов (без взятий) не делают. Докажите, что как бы шашки ни били друг друга, на доске их останется не менее двух.

Задача 5. На какое наибольшее количество разных прямоугольников можно разрезать по линиям сетки: **а)** прямоугольник 5×6 клеточек; **б)** прямоугольник 12×6 клеточек; **в)** прямоугольник 2×36 клеточек?

Задача 6. Грани куба $9 \times 9 \times 9$ разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками 2×1 (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечётно.

Внимание! Сегодня (15 декабря) заключительное занятие кружков в 2018 году. В 2019 году занятия возобновятся в феврале. Следите за объявлениями на сайте `mmmf.msu.ru`.

Малый мехмат МГУ, 6 класс, группа «А» **15 декабря 2018 года**

Дополнительные задачи

Задача 7. Можно ли покрыть прямоугольник $5{\times}7$ уголками из трёх клеток ровно в несколько слоёв (чтобы каждая клетка была покрыта одним и тем же числом уголков)?

Задача 8. Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге в одном направлении. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой они могут обгонять друг друга?

Задача 9. В левом нижнем углу клетчатой доски $n{\times}n$ стоит конь. Известно, что наименьшее число ходов, за которое конь может дойти до правого верхнего угла, равно наименьшему числу ходов, за которое он может дойти до правого нижнего угла. Найдите n.