Малый мехмат МГУ, 6 класс, группа «А» **27 октября 2018 года**

Чётный, нечётный, чётный, нечётный...

Задача 1. На чудо-дереве росли 28 апельсинов и 19 бананов. Каждый день садовник снимает с дерева ровно два фрукта. Если снятые фрукты одинаковы, то на дереве появляется новый банан, а если разные — новый апельсин. В конце концов на дереве оказался только один фрукт. Какой именно?

Задача 2. a) Покажите, каким образом можно выдать сумму 8, 9, 10, 11, 12 копеек, используя только трёхкопеечные и пятикопеечные монеты.
b) Докажите, что трёхкопеечными и пятикопеечными монетами можно вы- дать любую сумму, большую 7 копеек.

Задача 3. На каждый маленький конверт наклеено 4 марки, а на каждый большой — 9 марок. Почтальон утверждает, что он может набрать любое количество марок, начиная с 24, не отклеивая их от конвертов. Прав ли он?

Задача 4. Из квадрата a) 8×8; b) 16×16; c) $2^n \times 2^n$ вырезали угловую клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру всегда можно разрезать на уголки, состоящие из трёх клеток. (Если задача не получается, попробуйте потренироваться на квадрате 4×4.)

Задача 5. a) Докажите, что существует четырехзначное число, состоящее из единиц и двоек, которое делится на 16.
b) Докажите, что существует пятизначное число, состоящее из единиц и дво- ек, которое делится на 32.
c) Докажите, что существует десятизначное число, состоящее из единиц и двоек, которое делится на 1024.

Задача 6. Маша написала на доске 10 чисел. Паша заметил, что сумма любых девяти чисел нечётна. Чётна или нечётна сумма всех написанных чисел?

Задача 7. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

Внимание! 3 ноября занятия не будет. Следующее занятие — 10 ноября.

Малый мехмат МГУ, 6 класс, группа «А» **27 октября 2018 года**

Дополнительные задачи

Задача 8. Пусть m и n – целые числа. Докажите, что $mn(m+n)$ – чётное число.

Задача 9. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, ..., восьмёркой и девяткой было нечётное число цифр?

Задача 10. В народной дружине 100 человек. Каждый вечер на дежурство выходят трое. Можно ли организовать дежурство так, чтобы через некоторое время оказалось, что каждый дежурил с каждым ровно один раз?

Малый мехмат МГУ, 6 класс, группа «Б» **27 октября 2018 года**

Чётный, нечётный, чётный, нечётный...

Задача 1. Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр достоинством в 1, 3 и 5 рублей?

Задача 2. Кирилл умножил сумму двух чисел на их произведение и получил 2019. Докажите, что Кирилл ошибся.

Задача 3. На 99 карточках пишут числа 1, 2, . . . , 99. После этого их переворачивают, перемешивают и на чистых сторонах снова пишут числа 1, 2, . . . , 99. Затем для каждой карточки складывают два её числа и 99 полученных сумм перемножают. Докажите, что результат окажется чётным.

Задача 4. На чудо-дереве растут 28 апельсинов и 19 бананов. Каждый день садовник снимает с дерева ровно два фрукта. Если снятые фрукты одинаковы, то на дереве появляется новый банан, а если разные — новый апельсин. В конце концов на дереве оказался только один фрукт. Какой именно?

Задача 5. a) Покажите, каким образом можно выдать сумму 8, 9, 10, 11, 12 копеек, используя только трёхкопеечные и пятикопеечные монеты.
b) Докажите, что трёхкопеечными и пятикопеечными монетами можно выдать любую сумму, большую 7 копеек.

Задача 6. . На каждый маленький конверт наклеено 4 марки, а на каждый большой — 9 марок. Почтальон утверждает, что он может набрать любое количество марок, начиная с 24, не отклеивая их от конвертов. Прав ли он?

Задача 7. В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

Внимание! 3 ноября занятия не будет. Следующее занятие — 10 ноября.

Малый мехмат МГУ, 6 класс, группа «Б» **27 октября 2018 года**

Дополнительные задачи

Задача 8. Автомат при опускании гривенника выбрасывает пять двушек, а при опускании двушки – пять гривенников. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двушкой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двушек и гривенников?

Задача 9. а) На столе лежит 21 монета решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 20 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх?
б) Тот же вопрос, если монет 20, а разрешается переворачивать по 19.

Задача 10. Можно ли так расставить знаки «+» или «−» между каждыми двумя соседними цифрами числа 123456789, чтобы полученное выражение равнялось нулю?