

1. Докажите, что  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  для любых  $x$  и  $y$ .
2. Докажите, что  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$  для любых неотрицательных  $x$  и  $y$ .
3. Докажите, что  $z + \frac{1}{z} \geq 2$  для любого положительного  $z$ .
4. Докажите, что при постоянной сумме двух чисел их произведение тем больше, чем ближе числа друг другу.  
*Например,  $5 + 5 = 4 + 6 = 3 + 7$  при этом  $5 \times 5 > 4 \times 6 > 3 \times 7$ .*

5. а) Докажите неравенство:  $a/b + b/a \geq 2$  для любых положительных  $a$  и  $b$ .  
б) У продавца, который продаёт сахар, есть рычажные весы, которые имеют плечи не совсем одинаковой длины, и гиря весом 1 кг. Покупатель хотел купить 2 кг сахара. Так как весы показывают не совсем точно, продавец первый килограмм взвесил на одной чаше весов, а второй — на другой. Кто выиграл, покупатель или продавец?
6. а) Докажите, что при  $s > 0$  и  $v > w > 0$  выполнено неравенство:

$$\frac{s}{v+w} + \frac{s}{v-w} \geq 2 \frac{s}{\sqrt{(v^2 - w^2)}}$$

- б) Корабль плывёт из А в В по течению реки, а затем возвращается против течения (скорость течения и кораблей постоянны). Потратит ли он на весь путь больше или меньше времени, чем на равный путь по озеру?
7. а) Докажите, что для всех положительных  $a$  и  $b$  выполнено неравенство:  $2a + b \geq 2\sqrt{2ab}$ . При каких  $a$  и  $b$  неравенство превращается в равенство?  
б) Прямоугольный участок около реки с трёх сторон огорожен забором (четвёртая сторона — берег, поэтому там забор не нужен). Длина забора 100 метров. Какую максимальную площадь может иметь этот участок?

1. Докажите, что  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  для любых  $x$  и  $y$ .
2. Докажите, что  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$  для любых неотрицательных  $x$  и  $y$ .
3. Докажите, что  $z + \frac{1}{z} \geq 2$  для любого положительного  $z$ .
4. Докажите, что при постоянной сумме двух чисел их произведение тем больше, чем ближе числа друг другу.  
*Например,  $5 + 5 = 4 + 6 = 3 + 7$  при этом  $5 \times 5 > 4 \times 6 > 3 \times 7$ .*

5. а) Докажите неравенство:  $a/b + b/a \geq 2$  для любых положительных  $a$  и  $b$ .  
б) У продавца, который продаёт сахар, есть рычажные весы, которые имеют плечи не совсем одинаковой длины, и гиря весом 1 кг. Покупатель хотел купить 2 кг сахара. Так как весы показывают не совсем точно, продавец первый килограмм взвесил на одной чаше весов, а второй — на другой. Кто выиграл, покупатель или продавец?
6. а) Докажите, что при  $s > 0$  и  $v > w > 0$  выполнено неравенство:

$$\frac{s}{v+w} + \frac{s}{v-w} \geq 2 \frac{s}{\sqrt{(v^2-w^2)}}$$

- б) Корабль плывёт из А в В по течению реки, а затем возвращается против течения (скорость течения и кораблей постоянны). Потратит ли он на весь путь больше или меньше времени, чем на равный путь по озеру?
7. а) Докажите, что для всех положительных  $a$  и  $b$  выполнено неравенство:  $2a + b \geq 2\sqrt{2ab}$ . При каких  $a$  и  $b$  неравенство превращается в равенство?  
б) Прямоугольный участок около реки с трёх сторон огорожен забором (четвёртая сторона — берег, поэтому там забор не нужен). Длина забора 100 метров. Какую максимальную площадь может иметь этот участок?