ММФ 7 класс **Целая и дробная часть числа** **15 апреля 2017**

Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробной частью числа x называется такое число $\{x\}$, что $[x]+\{x\}=x$.

Пример: $[3,14]=3$, а $\{3,14\}=0,14$
$[-3,14]=-4$, а $\{-3,14\}=0,86$

1. Какие числа по модулю меньше модуля своей целой части?
2. Постройте графики функций: а) $y=[x]$; б) $y=\{x\}$.
3. Найдите наименьшее неотрицательное число x, удовлетворяющее неравенству $[x]\cdot x\geq 3$.
4. Решить уравнение $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$.
5. Докажите равенство: $[x+1/2]=[2x]-[x]$.
6. Докажите неравенства: а) $0\leq[2x]-2[x]\leq 1$; б) $[2x]+[2y]\geq[x]+[y]+[x+y]$.
7. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3,9 \\ y+[z]+\{x\}=3,5 \\ z+[x]+\{y\}=2 \end{cases}$$
8. Найти число решений в натуральных числах уравнения $[x/10]=[x/11]+1$.

ММФ 7 класс **Целая и дробная часть числа** **15 апреля 2017**

Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробной частью числа x называется такое число $\{x\}$, что $[x]+\{x\}=x$.

Пример: $[3,14]=3$, а $\{3,14\}=0,14$
$[-3,14]=-4$, а $\{-3,14\}=0,86$

1. Какие числа по модулю меньше модуля своей целой части?
2. Постройте графики функций: а) $y=[x]$; б) $y=\{x\}$.
3. Найдите наименьшее неотрицательное число x, удовлетворяющее неравенству $[x]\cdot x\geq 3$.
4. Решить уравнение $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$.
5. Докажите равенство: $[x+1/2]=[2x]-[x]$.
6. Докажите неравенства: а) $0\leq[2x]-2[x]\leq 1$; б) $[2x]+[2y]\geq[x]+[y]+[x+y]$.
7. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3,9 \\ y+[z]+\{x\}=3,5 \\ z+[x]+\{y\}=2 \end{cases}$$
8. Найти число решений в натуральных числах уравнения $[x/10]=[x/11]+1$.

ММФ 7 класс **Целая и дробная часть числа** **15 апреля 2017**

Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробной частью числа x называется такое число $\{x\}$, что $[x]+\{x\}=x$.

Пример: $[3,14]=3$, а $\{3,14\}=0,14$
$[-3,14]=-4$, а $\{-3,14\}=0,86$

1. Какие числа по модулю меньше модуля своей целой части?
2. Постройте графики функций: а) $y=[x]$; б) $y=\{x\}$.
3. Найдите наименьшее неотрицательное число x, удовлетворяющее неравенству $[x]\cdot x\geq 3$.
4. Решить уравнение $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$.
5. Докажите равенство: $[x+1/2]=[2x]-[x]$.
6. Докажите неравенства: а) $0\leq[2x]-2[x]\leq 1$; б) $[2x]+[2y]\geq[x]+[y]+[x+y]$.
7. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3,9 \\ y+[z]+\{x\}=3,5 \\ z+[x]+\{y\}=2 \end{cases}$$
8. Найти число решений в натуральных числах уравнения $[x/10]=[x/11]+1$.

ММФ 7 класс **Целая и дробная часть числа** **15 апреля 2017**

Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробной частью числа x называется такое число $\{x\}$, что $[x]+\{x\}=x$.

Пример: $[3,14]=3$, а $\{3,14\}=0,14$
$[-3,14]=-4$, а $\{-3,14\}=0,86$

1. Какие числа по модулю меньше модуля своей целой части?
2. Постройте графики функций: а) $y=[x]$; б) $y=\{x\}$.
3. Найдите наименьшее неотрицательное число x, удовлетворяющее неравенству $[x]\cdot x\geq 3$.
4. Решить уравнение $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$.
5. Докажите равенство: $[x+1/2]=[2x]-[x]$.
6. Докажите неравенства: а) $0\leq[2x]-2[x]\leq 1$; б) $[2x]+[2y]\geq[x]+[y]+[x+y]$.
7. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3,9 \\ y+[z]+\{x\}=3,5 \\ z+[x]+\{y\}=2 \end{cases}$$
8. Найти число решений в натуральных числах уравнения $[x/10]=[x/11]+1$.

Решения:

1. отрицательные

2.

3.

4. Число слева целое, следовательно справа стоит целое число, то есть $\{x\} = 0$.
   Значит, x – целое число, поэтому уравнение можно переписать в виде $x^3 + x^2 + x = -1$, или $(x+1)(x^2+1) = 0$.

5.

6.

7. **Решение 1:**
   Разделим x на 10 и на 11 с остатком:
   $x = 10i + j = 11k + l$ $(0 \le j \le 9,\ 0 \le l \le 10,\ i \ge 0, k \ge 0)$.
   Число x является решением нашего уравнения тогда и только тогда, когда $i = k + 1$, то есть $k = 10 + j - l$. Осталось определить количество троек целых чисел (j, k, l) удовлетворяющих вышеперечисленным условиям. j может принимать 10, а l - 11 значений, и для каждой возможной пары чисел (j, l) мы имеем ровно одну возможность для k (легко видеть, что k всегда неотрицательно).
   Следовательно, искомое число троек равно $10 \cdot 11 = 110$.

   Решение 2:
   Если $x \ge 220$, то $x/10 \ge 2 + x/11$, поэтому и целые части чисел $x/10$ и $x/11$ отличаются по меньшей мере на 2.
   Если же $x < 220$, то эти целые части отличаются не больше, чем на 2. Заметим, что если $[x/10] = [x/11] + a$, то $[(x+110)/10] = [(x+110)/11] + a + 1$
   Отсюда следует, что ровно одно число из пары $\{x, x+110\}$ $(x < 110)$ является решением нашего уравнения. Таким образом, решений у него ровно $220 : 2 = 110$.

   Ответ: 110 решений.