Геометрические места точек

Геометрическое место точек (ГМТ) это множество точек на плоскости, удовлетворяющее какому-либо требованию.

Упражнение:

1. Постройте ГМТ, удалённых от точки O на расстояние r.
2. Постройте ГМТ, равноудалённых от концов отрезка AB.
3. Постройте ГМТ, равноудалённых от сторон данного угла.
4. Постройте ГМТ, удалённых от фиксированной прямой l на расстояние h.
5. Постройте ГМТ, равноудалённых от двух параллельных прямых l_1 и l_2.
6. Постройте ГМТ, равноудалённых от двух пересекающихся прямых l_1 и l_2.

Задачи:

1. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.
2. а) Постройте центр описанной окружности треугольника (окружности, проходящей через вершины треугольника).
   б) Постройте центр вписанной окружности треугольника (окружности, касающейся каждой из сторон треугольника).
   в) В каком случае эти два центра совпадают?
3. Из середины гипотенузы восставлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком, который делит угол треугольника в отношении $2 : 5$ (меньшая часть — при гипотенузе). Найдите этот угол.
4. Дана линейка с параллельными краями и без делений. Постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна (лежит вне чертежа).
5. Среди поля проходит прямая дорога, по которой со скоростью 10 км/ч едет автобус. Укажите все точки на поле, из которых можно догнать автобус, если бежать с такой же скоростью.
6. В треугольнике $\triangle ABC$ биссектриса, проведённая из вершины A, высота, проведённая из вершины B, и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите угол при вершине A.

Геометрическое место точек (ГМТ) это множество точек на плоскости, удовлетворяющее какому-либо требованию.

Упражнение:

1. Постройте ГМТ, удалённых от точки O на расстояние r.
2. Постройте ГМТ, равноудалённых от концов отрезка AB.
3. Постройте ГМТ, равноудалённых от сторон данного угла.
4. Постройте ГМТ, удалённых от фиксированной прямой l на расстояние h.
5. Постройте ГМТ, равноудалённых от двух параллельных прямых l_1 и l_2.
6. Постройте ГМТ, равноудалённых от двух пересекающихся прямых l_1 и l_2.

Задачи:

1. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.
2. а) Постройте центр описанной окружности треугольника (окружности, проходящей через вершины треугольника).
   б) Постройте центр вписанной окружности треугольника (окружности, касающейся каждой из сторон треугольника).
   в) В каком случае эти два центра совпадают?
3. Из середины гипотенузы восставлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком, который делит угол треугольника в отношении $2:5$ (меньшая часть — при гипотенузе). Найдите этот угол.
4. Дана линейка с параллельными краями и без делений. Постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна (лежит вне чертежа).
5. Среди поля проходит прямая дорога, по которой со скоростью 10 км/ч едет автобус. Укажите все точки на поле, из которых можно догнать автобус, если бежать с такой же скоростью.
6. В треугольнике $\triangle ABC$ биссектриса, проведённая из вершины A, высота, проведённая из вершины B, и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите угол при вершине A.

Решения:

1. Срединный перпендикуляр.

2. в) в случае правильного треугольника.

3. 70^o.

4.

5. Пусть точка O - начальное положение автобуса, прямая l - дорога, по которой он едет, луч OA прямой l сонаправлен с движением автобуса. Рассмотрим некоторую точку X поля, и пусть X' - проекция точки X на прямую l. Рассмотрим две возможности.

   1) Пусть точка X' не лежит на луче OA или совпадает с точкой O. Допустим, что из точки X можно догнать автобус в некоторой точке B луча OA. Тогда отсюда следовало бы, что расстояние XB не больше, чем OB (так как скорость бега равна скорости автобуса). Однако XB не меньше $X'B$ (проекция не превосходит по длине наклонной), а $X'B$ в свою очередь не меньше, чем OB. Поэтому XB не меньше OB, причем равенство достигается только если X совпадает с O. Таким образом, из точки X нельзя догнать автобус (если только X не совпадает с O).

   2) Пусть X' лежит на луче OA. Проведем серединный перпендикуляр к отрезку OX, он пересечет луч OA в некоторой точке B. Точка B равноудалена от точек O и X, поэтому если из точки X бежать по прямой в направлении XB со скоростью автобуса, то в точке B произойдет встреча с автобусом.

   Из сказанного выше вытекает следующий ответ: если провести через точку O прямую m, перпендикулярную прямой l, то автобус можно догнать только из точек той полуплоскости относительно прямой m, в которой лежит луч OA.

6. Пусть M точка пересечения указанных в условии биссектрисы, высоты BH и серединного перпендикуляра. Обозначим $\angle BAM = \angle CAM = \alpha$. Поскольку точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , то $\angle ABM = \angle BAM = \alpha$.

   Сумма острых углов прямоугольного треугольника $\triangle ABH$ равна 90^o , поэтому $\alpha + 2\alpha = 90^o$. Отсюда находим, что $\alpha = 30^o$. Следовательно, $BAC = 2\alpha = 60^o$.