

1. В тюрьме Кощея пять камер, пронумерованных числами от 1 до 5. В каждой камере сидит по одному узнику. Василиса уговорила Кощея провести эксперимент: на стене каждой камеры она один раз напишет какой-нибудь номер и в полночь каждый узник перейдёт в камеру с указанным номером (если номер на стене совпадает с номером камеры, то узник никуда не переходит). В следующую полночь узники опять должны перейти из камеры в камеру согласно указаниям на стене, и так они действуют в течение пяти ночей. Если расположение узников в камерах в течение всех шести дней (включая первый) ни разу не повторится, то Василисе дадут звание Премудрой, а узников отпустят. Помогите Василисе написать номера в камерах.
2. Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, ее содержащий. После этого Фокусник определенным образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?
3. Есть доска 3×3 . В некоторой клетке стоит заяц. Охотник выбирает любые две клетки, на которые заяц не сможет пойти. За один ход заяц перебегает на любую разрешенную соседнюю по стороне клетку. Если заяц не сможет сделать ход, он проиграет. Может ли Охотник выиграть, если он увидит зайца только в тот момент, когда тому некуда пойти?
4. В темнице сидит 100 узников, каждый в одиночной камере (общение между камерами невозможно). Король предложил узникам сыграть в игру. Для этого в специальной комнате повесили лампочку с выключателем (только два положения вкл/выкл). Лампочка изначально выключена. В эту комнату по одному заводят узников и предлагают им сделать одно из двух действий: поменять положение выключателя или ничего не сделать. Если в какой-то момент один из узников вдруг скажет фразу «В этой комнате побывали все 100 узников» и это окажется правдой, то всех отпускают, если нет — то казнят. Смогут ли узники выйти на волю, если им за день до игры предоставлена возможность всем вместе пообщаться и выработать стратегию? (Считается что узников водят в произвольном порядке, сколь угодно долго и каждый узник побывает в камере сколь угодно много раз).
5. На плоскости расположены 100 точек-овец и одна точка-волк. За один ход волк передвигается на расстояние не больше 1, после этого одна из овец передвигается на расстояние не больше 1, после этого снова ходит волк и т. д. При любом ли начальном расположении точек волк сможет поймать одну из овец?
6. Переаттестация Совета Мудрецов из 1000 мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает на голову каждому колпак белого или черного цвета. Каждый мудрец видит цвета колпаков всех впереди стоящих мудрецов, но не видит цвет своего колпака и цвета колпаков мудрецов, стоящих сзади него. Затем мудрецы по одному называют какой-нибудь цвет (каждому разрешается говорить ровно один раз; то, что говорит один мудрец, слышат все). После этого король казнит всех мудрецов, назвавших цвет, отличный от цвета своего колпака. Накануне переаттестации все члены Совета договорились между собой и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?
7. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

1. В тюрьме Кощея пять камер, пронумерованных числами от 1 до 5. В каждой камере сидит по одному узнику. Василиса уговорила Кощея провести эксперимент: на стене каждой камеры она один раз напишет какой-нибудь номер и в полночь каждый узник перейдёт в камеру с указанным номером (если номер на стене совпадает с номером камеры, то узник никуда не переходит). В следующую полночь узники опять должны перейти из камеры в камеру согласно указаниям на стене, и так они действуют в течение пяти ночей. Если расположение узников в камерах в течение всех шести дней (включая первый) ни разу не повторится, то Василисе дадут звание Премудрой, а узников отпустят. Помогите Василисе написать номера в камерах.
2. Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, ее содержащий. После этого Фокусник определенным образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?
3. Есть доска 3×3 . В некоторой клетке стоит заяц. Охотник выбирает любые две клетки, на которые заяц не сможет пойти. За один ход заяц перебегает на любую разрешенную соседнюю по стороне клетку. Если заяц не сможет сделать ход, он проиграет. Может ли Охотник выиграть, если он увидит зайца только в тот момент, когда тому некуда пойти?
4. В темнице сидит 100 узников, каждый в одиночной камере (общение между камерами невозможно). Король предложил узникам сыграть в игру. Для этого в специальной комнате повесили лампочку с выключателем (только два положения вкл/выкл). Лампочка изначально выключена. В эту комнату по одному заводят узников и предлагают им сделать одно из двух действий: поменять положение выключателя или ничего не сделать. Если в какой-то момент один из узников вдруг скажет фразу «В этой комнате побывали все 100 узников» и это окажется правдой, то всех отпускают, если нет — то казнят. Смогут ли узники выйти на волю, если им за день до игры предоставлена возможность всем вместе пообщаться и выработать стратегию? (Считается что узников водят в произвольном порядке, сколь угодно долго и каждый узник побывает в камере сколь угодно много раз).
5. На плоскости расположены 100 точек-овец и одна точка-волк. За один ход волк передвигается на расстояние не больше 1, после этого одна из овец передвигается на расстояние не больше 1, после этого снова ходит волк и т. д. При любом ли начальном расположении точек волк сможет поймать одну из овец?
6. Переаттестация Совета Мудрецов из 1000 мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает на голову каждому колпак белого или черного цвета. Каждый мудрец видит цвета колпаков всех впереди стоящих мудрецов, но не видит цвет своего колпака и цвета колпаков мудрецов, стоящих сзади него. Затем мудрецы по одному называют какой-нибудь цвет (каждому разрешается говорить ровно один раз; то, что говорит один мудрец, слышат все). После этого король казнит всех мудрецов, назвавших цвет, отличный от цвета своего колпака. Накануне переаттестации все члены Совета договорились между собой и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?
7. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

Решения:

1. Пусть Василиса запишет на стенах камер указанный набор номеров. Тогда первые два узника будут каждую ночь меняться местами, то есть каждый из них будет возвращаться на свое изначальное место раз в два дня. Остальные три узника будут возвращаться на свои места раз в три дня. Поскольку числа 2 и 3 взаимно просты, то мы получим шесть различных размещений узников по камерам.

например: 2, 1, 4, 5, 3 (в порядке номеров камер).

2. первая расстановка карт произвольная. Вторая получается из первой поворотом на 90° . Фактически фокуснику называют столбец и строку карты в первой расстановке.

3. Покрасим доску в шахматную раскраску. Предположим, что заяц сидит на черной клетке. Тогда несложно придумать, как его поймать. Если же мы его не поймали, то он сидел на белой, постреляем, чтобы он снова оказался на черной. А дальше тем же алгоритмом поймаем его.

4. На собрании узники выбирают одного специального человека - "счетчика". Далее: поведение обычного узника

— если он в комнате первый раз и если лампочка не включена, то он её включает,

— если он в комнате уже побывал, то он ничего не делает

— если он в комнате в первый раз и лампочка включена, то он ничего не делает.

Поведение "счетчика":

— если лампочка в комнате включена, то надо лампочку выключить (и прибавить +1 к количеству узников которое точно побывало в комнате)

— если лампочка выключена, то ничего не делать (значит в комнате никого нового не появилось)

5. Введем на плоскости систему координат. Пусть k -ая овца имеет координаты $(4k; 0)$, $k = 1, 2, \dots, 100$, а начальное положение волка таково, что за один ход он не может достичь ни одной овцы.

Опишем стратегию овец. Овцы будут ходить только по прямым $x = 4k$. Пусть перед ходом овец волк находится в точке $(x; y)$ одной из вертикальных полос $|x - 4k| < 2$ (эти полосы не пересекаются). Тогда ходит овца с номером k , причем если эта овца находится в точке $(4k; z)$, то она перемещается в точку $(4k; z + 1)$ если $z > y$ и в точку $(4k; z - 1)$ если z не больше y (т.е. k -ая овца удаляется от волка на 1 вдоль оси Oy). Ясно, что после этого волк за один ход снова не может поймать ни одной овцы. Если волк перед ходом овец находится вне полос $|x - 4k| < 2$, то овцы могут сделать любой ход. Придерживаясь этой стратегии, овцы смогут добиться того, что ни одна из них не будет поймана.

6. ($n = 1000$) Нет никакой гарантии, что мудрец, стоящий в конце колонны спасется - его колпака не видит ни один мудрец.

Покажем, что гарантированно спастись могут все остальные мудрецы. Пусть мудрец, стоящий последним в колонне, скажет "белый если он видит перед собой четное число белых колпаков, и "черный если нечетное. Теперь мудрецы по порядку от $(n - 1)$ -го к первому смогут называть цвет своего колпака.

В тот момент, когда очередь говорить доходит до k -го мудреца ($k = n - 1, n - 2, \dots, 1$), он знает четность числа белых колпаков всех мудрецов от 1-го до $(n - 1)$ -го, и знает цвета колпаков всех мудрецов с 1-го до $(n - 1)$, за исключением своего (мы предполагаем, что $(n - 1)$ -й, ..., $(k + 1)$ -й мудрецы уже верно назвали цвет своего колпака, колпаки же 1-го, 2-го, ..., $(k - 1)$ -го мудрецов k -ый мудрец видит). По этим данным k -ый мудрец легко определяет цвет своего колпака.

7. Сопоставим каждому мудрецу с некоторым мнением знак "+" а с противоположным – знак "-". Тогда расстановке мудрецов соответствует расстановка 101 знака по кругу.

Пусть в некоторый момент два одинаковых знака стоят подряд. Тогда в следующую минуту они не изменятся, и поэтому останутся одинаковыми. Значит, ни в один из последующих моментов они также не изменятся.

Назовём знак стабильным, если рядом с ним стоит хотя бы один такой же. Поскольку количество знаков нечётно, стабильный знак найдётся. Кроме того, любой стабильный знак уже не изменится и остаётся стабильным, а любой нестабильный знак в очередную минуту меняется на противоположный. Если в какой-то момент не все знаки стабильны, то найдётся стабильный знак a , соседний с нестабильным знаком b . В следующую минуту a не изменится, а b изменится, то есть станет таким же, как a и, следовательно, стабильным.

Итак, пока нестабильные знаки есть, их количество строго уменьшается. Значит, рано или поздно оно станет равным нулю, и перемены знаков закончатся.