

INTERMEZZO

1. Человек проходит 1 км на юг, потом 1 км на восток, потом 1 км на север и... возвращается в исходную точку. В каких точках Земли такое возможно?

2. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

3. На поверхности куба взята точка  $A$ . Сколько существует кратчайших путей *по поверхности куба* из точки  $A$  в диаметрально противоположную ей точку  $B$ , если **а)**  $A$  — центр грани куба; **б)**  $A$  — вершина куба? Как построить эти кратчайшие пути?

4. На трёх соседних гранях куба взяты точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , и эти точки соединены кратчайшими путями по поверхности куба. Найдите сумму углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  при вершинах получившегося «треугольника».

5. На бесконечный конус наматывается нерастяжимая лента так, что она плотно прилегает к его поверхности и не покрывает вершины конуса. Может ли лента совершить бесконечное число оборотов?

6. **а)** В окружность с центром  $O$  вписан правильный треугольник  $ABC$ .

Докажите, что  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ .

**б)** В сферу с центром  $O$  вписан правильный тетраэдр  $ABCD$ . Докажите, что  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$ .

7. Найдите наименьшее возможное значение выражения

**а)**  $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(3 - x)^2 + 9}$ ;

**б)**  $\arccos(\cos 30^\circ \cdot \cos x + \sin 30^\circ \cdot \sin x \cdot \cos 25^\circ) + \arccos(\cos x \cdot \cos 60^\circ + \sin x \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 65^\circ)$ .

