

## Повороты и симметрии

(в ожидании теоремы Шаля)

В этом листке в два раза больше задач, чем кажется на первый взгляд. Каждую задачу нужно решить в двух ситуациях — на евклидовой плоскости и на сфере. Потом к этим двум добавится ещё одна — плоскость Лобачевского.

Во всех задачах предполагается, что  $0 < \varphi < 2\pi$  (при  $\varphi = 0$  поворот  $\mathbf{R}_A^\varphi$  есть тождественное преобразование, и этот случай неинтересен).

1. Сколько неподвижных точек имеет движение  $\mathbf{R}_A^\varphi$ ?
2. Найдите композицию движений  $\mathbf{S}_\ell \circ \mathbf{S}_m$ . (Рассмотрите все возможные случаи.)
3. Пусть прямая  $\ell$  проходит через точку  $A$ . а) Найдите композицию движений  $\mathbf{R}_A^\varphi \circ \mathbf{S}_\ell$ .  
б) Найдите все движения  $\mathcal{X}$ , удовлетворяющие уравнению  $\mathcal{X} \circ \mathbf{S}_\ell = \mathbf{R}_A^\varphi$ .
4. Найдите композицию движений  $\mathbf{R}_A^\varphi \circ \mathbf{R}_B^\psi$ . (Рассмотрите все возможные случаи.)
5. Пусть прямая  $\ell$  не проходит через точку  $A$ . Обладает ли движение  $\mathbf{R}_A^\varphi \circ \mathbf{S}_\ell$  неподвижной точкой?