Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости

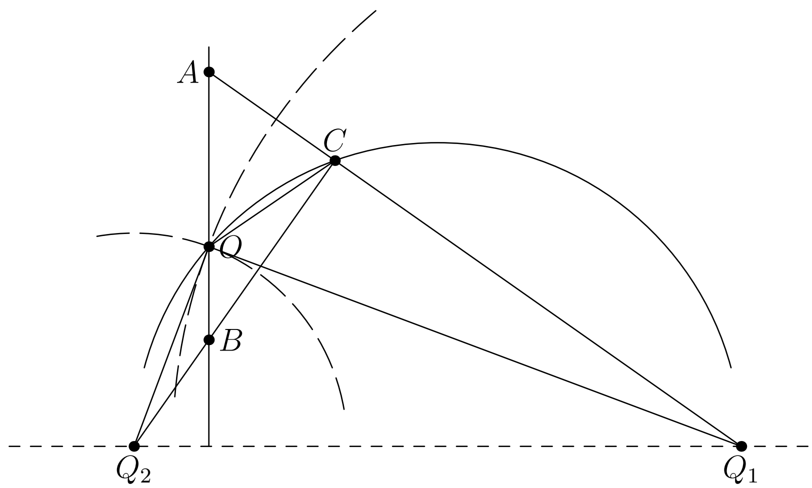
Сюжет об окружности и трёх точках

По определению модели Пуанкаре, *прямыми* (в смысле Лобачевского) на ней являются полуокружности с центром на абсолюте (это *неособые* прямые), а также начинающиеся на абсолюте вертикальные лучи (такие прямые называются *особыми*).

А какая кривая соответствует *окружности?* Здесь слово «окружность» понимается в смысле Лобачевского, как геометрическое место точек, расстояния от которых — опять же в смысле Лобачевского — до некоторой точки *(центра)* O равны одному и тому же *радиусу* R.

Оказывается, ответ на этот вопрос довольно прост: *окружность в смысле Лобачевского изображается в модели Пуанкаре евклидовой окружностью,* однако её евклидов центр не совпадает с центром в смысле Лобачевского.

Докажем это. Пусть O — центр окружности (в смысле Лобачевского) радиуса R. Проведём через O особую прямую и отметим на ней две точки A и B, лежащие на нашей окружности (т.е. находящиеся в смысле Лобачевского на расстоянии R от O). Теперь пусть C — произвольная точка окружности. Поскольку (опять же в смысле Лобачевского) отрезки OA, OC и OB равны, то существуют симметрии (инверсии), переводящие точку C в точки A и B. Окружности, относительно которых производятся эти инверсии, на чертеже нарисованы пунктиром; центры их — Q_1 и Q_2. Пусть радиусы этих окружностей равны r_1 и r_2.



Эти две окружности являются биссектрисами углов COA и COB, следовательно, они перпендикулярны. Перпендикулярность окружностей означает перпендикулярность касательных, а значит, и радиусов, проведённых к точке O их пересечения. Проще говоря, $Q_1O \perp Q_2O$.

Из соотношений инверсии получаем, что

$$Q_1C \cdot Q_1A = r_1^2 = Q_1O \cdot Q_1O \qquad \text{и} \qquad Q_2C \cdot Q_2B = r_2^2 = Q_2O \cdot Q_2O,$$

откуда

$$\frac{Q_1C}{Q_1O} = \frac{Q_1O}{Q_1A} \qquad \text{и} \qquad \frac{Q_2C}{Q_2O} = \frac{Q_2O}{Q_2B}.$$

Отсюда получаем, что $\triangle Q_1OC \sim \triangle Q_1AO$ и $\triangle Q_2OC \sim \triangle Q_2BO$. Наконец,

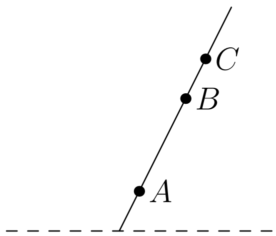
$$\angle Q_1CB = \angle Q_1CO - \angle Q_2CO = \angle Q_1OA - \angle Q_2OB = (180^\circ - \angle Q_1OB) - \angle Q_2OB = 180^\circ - \angle Q_1OQ_2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Значит, угол ACB также прямой, поэтому точка C лежит на евклидовой окружности с диаметром AB.

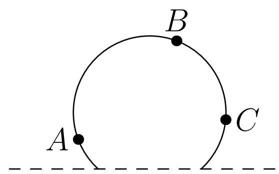
Обратное рассуждение (доказательство того, что любая точка на этой евклидовой окружности лежит также на окружности в смысле Лобачевского) оставим читателю.

Заметим, что точка O не является евклидовой серединой отрезка AB, а значит, и евклидовым центром окружности.

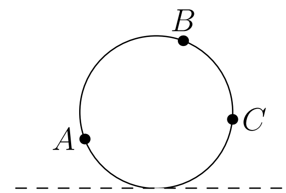
На евклидовой плоскости через любые три точки можно провести либо окружность, либо прямую. На плоскости Лобачевского возможных случаев больше. Через данные три точки A, B и C можно провести евклидову окружность или прямую. Однако эта окружность или прямая может не оказаться окружностью или прямой в смысле Лобачевского. Другие возможные случаи таковы:



1. Точки A, B, C лежат на евклидовой прямой, но эта прямая невертикальна.



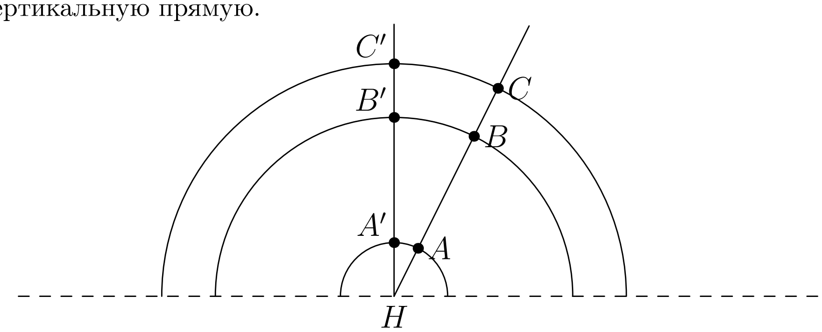
2. Точки A, B, C лежат на окружности, пересекающей абсолют, но не с центром на нём.



3. Точки A, B, C лежат на окружности, касающейся абсолюта.

Каким же кривым плоскости Лобачевского соответствуют такие евклидовы лучи и дуги окружностей?

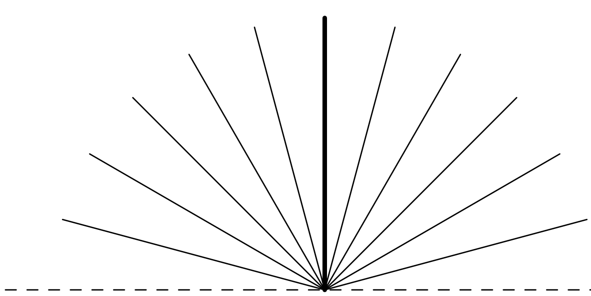
Проще всего первый случай. Проведём через точку, в которой луч исходит от абсолюта, особую (вертикальную) прямую. Далее, опустим из каждой точки на наклонной прямой перпендикуляр (в смысле Лобачевского) на вертикальную прямую.

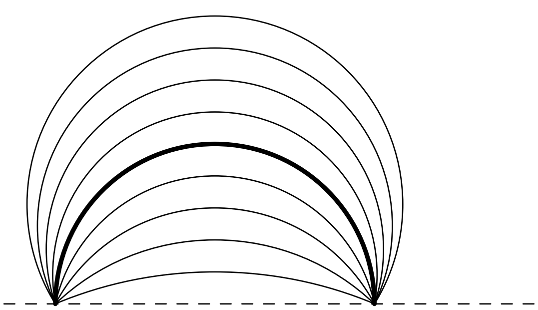


Пусть перпендикуляр из A попал в точку A', перпендикуляр из B — в точку B', и так далее. Легко заметить, что отрезки (в смысле Лобачевского) AA', BB', CC', ... совмещаются подходящими инверсиями с центром в точке H. Значит, эти отрезки равны в смысле Лобачевского.

Таким образом, наклонный луч есть геометрическое место точек, удалённых от данной особой прямой на равные расстояния и находящихся по данную сторону от этой прямой. В евклидовом случае это была бы прямая, параллельная данной, а на плоскости Лобачевского это кривая, называемая *эквидистантой* (на латыни это и значит «линия равных расстояний»).

Все эквидистанты данной особой прямой выглядят так, как показано слева. Применив инверсию, переводящую особую прямую в неособую, мы получим соответствующий пучок эквидистант для неособой прямой (на рисунке справа).





На этих чертежах исходная прямая выделена среди её эквидистант более жирной линией.

Таким образом, в случаях 1 и 2 точки A, B и C оказываются на одной эквидистанте. Наконец, в случае 3 получается евклидова окружность, касающаяся абсолюта. Такая кривая на плоскость Лобачевского называется *орициклом* — по-гречески это значит «предельная (граничная) окружность».

Итак, *через три данные точки на плоскости Лобачевского можно провести либо прямую, либо окружность, либо орицикл, либо эквидистанту, причём такая кривая единственна.*

В конце сообщим любопытному читателю, что здесь мы упустили ещё один случай расположения точек A, B, C. Восстановите этот случай и укажите, к какому из четырёх типов в этом случае относится получившаяся кривая.