Теорема Шаля в трех лицах

С.КУЗНЕЦОВ

ПОНЯТИЕ *ДВИЖЕНИЯ (ИЗОМЕТРИческого преобразования)* играет весьма важную роль в геометрии. По определению, движением плоскости называется ее преобразование, сохраняющее расстояния между точками: если A переходит в A', а B – в B', то отрезок $A'B'$ должен быть равен отрезку AB. С помощью третьего признака равенства треугольников нетрудно доказать, что всякое движение сохраняет также и углы – таким образом, сохраняется вся геометрическая структура преобразуемых объектов. Недаром фигуры, которые можно совместить движением, считаются *равными*.

Движениями являются, например, *поворот* на угол[1] φ относительно некоторой точки A (рис.1), обозначаемый $\mathbf{R}_A^{\varphi}$; *параллельный перенос* на вектор $\vec{a}$

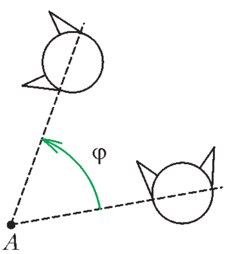

Рис. 1

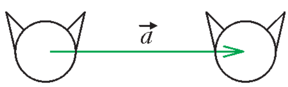

Рис. 2

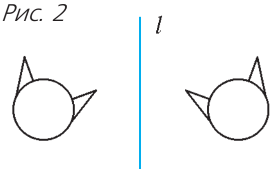

Рис. 3

(рис.2), обозначаемый $\mathbf{T}_{\vec{a}}$; *осевая симметрия* относительно прямой l (рис.3), обозначаемая $\mathbf{S}_l$.

Новые движения можно получать при помощи *композиции*: движение $\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ состоит в последовательном применении сначала движения $\mathcal{G}$, а потом $\mathcal{F}$ к результату.[2] Примером композиции движений является *скользящая симметрия*, $\mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{S}_l$, где $\vec{a}$ – вектор, параллельный прямой l (рис.4). В этом случае порядок композиции не имеет значения:

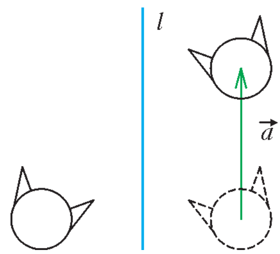

Рис. 4

$$\mathbf{T}_{\vec{a}} \circ \mathbf{S}_l = \mathbf{S}_l \circ \mathbf{T}_{\vec{a}} .$$

Другие известные виды движений оказываются частными случаями перечисленных: например, центральная симметрия $\mathbf{Z}_A$ есть поворот на $180°$, т.е. $\mathbf{R}_A^{180°}$; тождественное преобразование, оставляющее все точки на месте, можно записать как перенос на нулевой вектор ($\mathbf{T}_{\vec{0}}$) или как поворот на нулевой угол вокруг произвольной точки ($\mathbf{R}_A^{0°}$); композиция нетривиального поворота и параллельного переноса опять дает поворот; композиция поворотов, даже с разными центрами, – поворот или параллельный перенос[3] и так далее. Осевая симметрия – это скользящая симметрия с $\vec{a} = \vec{0}$. Оказывается, что так будет со всеми видами движений.

---

[1] Угол берется со знаком: положительное направление – против часовой стрелки, отрицательное – по часовой стрелке.

[2] Обратите внимание, что при композиции мы применяем преобразования в необычном порядке – справа налево. Таким образом, получается равенство $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(X) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(X))$. Если бы мы вместо $\mathcal{F}(X)$ писали $(X)\mathcal{F}$, как в *обратной польской записи* (введена Ч.Хэмблингом на основе «польской записи» Я.Лукасевича), то и в композиции преобразования применялись бы слева направо.

[3] Красивую иллюстрацию этого факта можно увидеть в статье С.Дориченко, С.Шашкова и А.Шеня «Загадочные круги и движения плоскости» («Квант» №4 за 2009 г.).

Теорема Шаля. *Всякое движение евклидовой плоскости есть или поворот, или параллельный перенос, или скользящая симметрия.*

Эта теорема, доказанная французским геометром Мишелем Шалем в середине XIX века, достаточно широко известна и встречается во многих книгах по элементарной геометрии; есть о ней статья и в «Кванте»[4]. В этой статье мы докажем теорему Шаля и ее аналоги в трех геометриях: плоской евклидовой, сферической и геометрии Лобачевского.

Аксиоматика геометрии Лобачевского отличается от евклидовой только одной аксиомой – *аксиомой о параллельных*. У Евклида эта аксиома выглядит так:

Аксиома Евклида. *Через данную точку A, не лежащую на данной прямой a, можно провести не более одной прямой, параллельной прямой a (т.е. не имеющей с ней общих точек).*

Эта аксиома, в сравнении с другими, не кажется наглядно очевидной и скорее выглядит как теорема, которую следовало бы доказать. Тем не менее, попытки сделать это, которые предпринимали многие геометры со времен Евклида и до XIX века, не увенчались успехом. В конце концов, Николай Иванович Лобачевский в своей работе «О началах геометрии» (1828 г.) предположил, что если заменить евклидову аксиому о параллельных на ее отрицание, то получится непротиворечивая теория, и тем самым доказать эту аксиому как теорему из остальных аксиом невозможно (одновременное присутствие утверждения и его отрицания делают теорию противоречивой). Примерно в то же время к этой идее пришли также Янош Бойаи и Карл Фридрих Гаусс. Основываясь на предположении, что замена аксиомы о параллельных на ее отрицание не приводит к противоречиям, Лобачевский значительно продвинулся в развитии новой геометрической теории, которую мы сейчас называем геометрией Лобачевского, – однако строго доказать, что противоречия в ней в принципе получить невозможно, удалось лишь спустя полвека после открытия Лобачевского. Для этого были построены *модели* геометрии Лобачевского, одну из которых мы приводим ниже.

Итак, в геометрии Лобачевского вместо аксиомы о параллельных принято ее *отрицание*.

Аксиома Лобачевского. *Существуют такие прямая a и не лежащая на ней точка A, что через точку A можно провести хотя бы две прямые, не имеющие общих точек с A.*

В присутствии других аксиом Евклида из аксиомы Лобачевского следует ее более сильный вариант: *для любых прямой a и не лежащей на ней точки A через A можно провести более одной прямой, параллельной a.* Все остальные аксиомы у Евклида и у Лобачевского совпадают.

К этим двум геометриям – Евклида и Лобачевского – мы добавим также *сферическую геометрию*. Точки этой геометрии расположены на сфере (в обычном трехмерном евклидовом пространстве). Роль прямых играют *большие круги*, образующиеся при сечении сферы плоскостями, проходящими через ее центр: дуга большого круга – это кратчайший путь между двумя точками, если двигаться разрешено только по сфере. Может показаться, что рассуждать о фигурах на сфере можно методами обычной евклидовой стереометрии, и выделять отдельно сферическую геометрию излишне. Однако взглянуть на сферу как на некий аналог плоскости иногда бывает очень полезно, как для теоретических, так и для практических задач.[5] Сферическая геометрия и вправду многим похожа на планиметрии Евклида и Лобачевского (в частности, в ней верны многие из теорем, используемых в доказательстве теоремы Шаля – см. ниже), но многим и отличается. Например, на сфере возможен треугольник, все углы которого прямые (рис.5).

---

[4] В.Бугаенко. «Движения плоскости и теорема Шаля» («Квант» №4 за 2009 г.).

[5] Например, о применении сферической геометрии в астрономии можно почитать в книге В.П.Цесевича «Что и как наблюдать на небе».

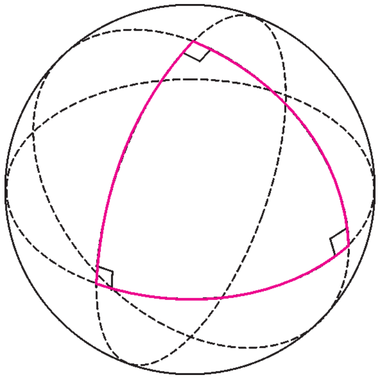

Рис. 5

Начнем доказывать теорему Шаля так, как это делается в евклидовом случае, и попробуем продвинуться как можно дальше так, чтобы наши рассуждения сохраняли свою силу и в двух других геометриях.

Лемма о трех гвоздях. *Если движение $\mathcal{F}$ имеет три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, то $\mathcal{F}$ – тождественное преобразование.*

Доказательство. Пусть это не так: $\mathcal{F}(D) = D' \neq D$ для некоторой точки D. Тогда, поскольку для любой неподвижной точки A верно равенство $AD = AD'$, все неподвижные точки лежат на одной прямой – серединном перпендикуляре к отрезку DD'. Противоречие.

Теорема о трех симметриях. *Всякое движение плоскости есть или тождественное преобразование, или осевая симметрия, или композиция двух осевых симметрий, или композиция трех осевых симметрий.*

Идея доказательства в следующем: с помощью симметрий можно «возвращать» точки на их исходное место, т.е. «создавать» неподвижные точки в нужном нам количестве.

Доказательство. Если движение $\mathcal{F}$ тождественное, то теорема доказана. В противном случае $\mathcal{F}(A) = A' \neq A$ для некоторой точки A. Обозначим через a серединный перпендикуляр к отрезку AA' (рис.6) и положим

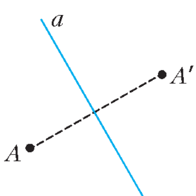

Рис. 6

$\mathcal{G} = \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$. Тогда A – неподвижная точка движения $\mathcal{G}$.

Если оказалось, что $\mathcal{G}$ тождественное, то $\mathcal{F} = \mathbf{S}_a$ (осевая симметрия).

В противном случае $\mathcal{G}(B) = B' \neq B$ для некоторой точки B. Пусть b – серединный перпендикуляр к отрезку BB'; поскольку $AB = AB'$ (A – неподвижная точка), точка A лежит на прямой b (рис.7). Положим $\mathcal{H} = \mathbf{S}_b \circ \mathcal{G} = \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$. У движения $\mathcal{H}$ уже две неподвижные точки: A и B.

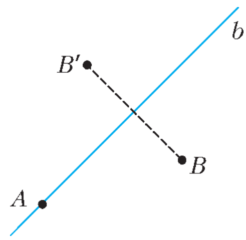

Рис. 7

Снова, если $\mathcal{H}$ – тождественное, то $\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ (композиция двух симметрий). В противном случае $\mathcal{H}(C) = C' \neq C$, и неподвижные точки A и B составляют прямую c – серединный перпендикуляр к отрезку CC' (рис.8). Из этого, кстати, следует, что

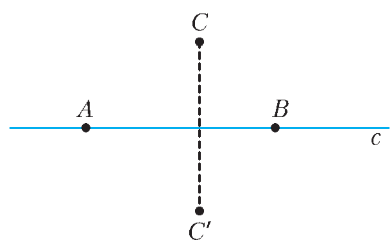

Рис. 8

сама точка C на прямой c не лежит. Значит, у движения $\mathbf{S}_c \circ \mathcal{H} = \mathbf{S}_c \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_a \circ \mathcal{F}$ три неподвижные точки (A, B и C), и они не лежат на одной прямой. По лемме о трех гвоздях это движение тождественное. Следовательно, $\mathcal{F} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$ (композиция трех симметрий).

Если внимательно посмотреть на доказательства леммы о трех гвоздях и теоремы о трех симметриях, можно заметить, что из всего арсенала геометрических средств мы использовали только **теорему о серединном перпендикуляре**: *серединный перпендикуляр к отрезку AB есть геометрическое место точек, расположенных на равных расстояниях от то-*

чек A и B. Классическое евклидово доказательство этого факта не использует аксиому о параллельных – оно, как говорится, принадлежит *абсолютной геометрии*, т.е. общей части геометрий Евклида и Лобачевского. Теорема о серединном перпендикуляре верна также и на сфере. Таким образом, остается понять, как устроены композиции двух или трех осевых симметрий в каждой из трех геометрий.

Композицию двух симметрий, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$, вычислить относительно просто. В евклидовом случае возможны две ситуации: (1) прямые a и b пересекаются, и тогда $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ есть поворот относительно точки их пересечения на удвоенный угол между этими прямыми (рис.9); (2) прямые a и b параллельны – тогда $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ есть параллельный перенос (рис.10). На сфере все еще проще: любые две «прямые» (т.е. два больших круга) пересекаются в двух диаметрально противоположных точках, и $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ есть вращение сферы вокруг проходящей через эти две точки оси (рис.11).

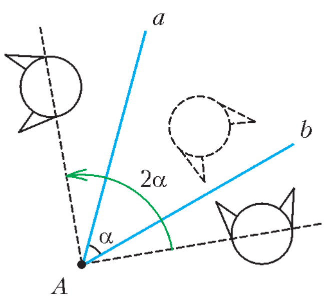

Рис. 9

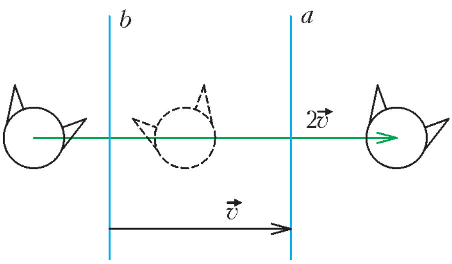

Рис. 10

Чтобы разобраться со случаем геометрии Лобачевского, нам будет удобно иметь наглядное представление плоскости Лобачевского, иначе говоря, построить модель плоскости Лобачевского на материале евклидовой плоскости. Для этого нужно придать новый смысл основным геометрическим понятиям – по-новому объяснить, что такое точка, прямая, равенство отрезков, равенство углов, и сделать это таким образом, чтобы при этом остались верны все евклидовы аксиомы, кроме аксиомы о параллельных. Сделать это можно многими разными способами; у нас будет один из них – *модель Пуанкаре в верхней полуплоскости.*

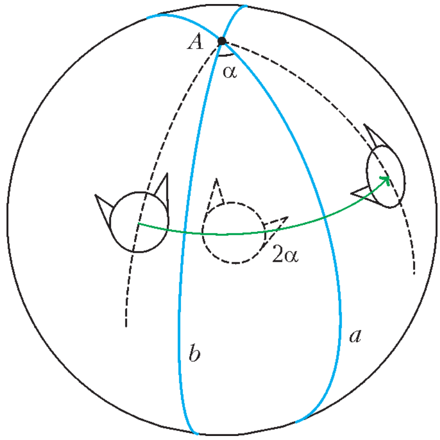

Рис. 11

Точками, принадлежащими плоскости Лобачевского, будут считаться только точки, расположенные строго выше некоторой выбранной прямой, называемой *абсолютом*. (Если абсолют считать осью Ox, то мы будем рассматривать только точки с $y > 0$.) Роль *прямых* в этой модели будут играть полуокружности с центром на абсолюте, а также вертикальные лучи. Вторая разновидность прямых называется *особой*.

Сразу видно, что в этой модели нарушается евклидова аксиома о параллельных: через данную точку A можно провести бесконечно много прямых, не имеющих общих точек с данной прямой a (рис.12). Все эти прямые можно было бы считать параллельными прямой a – однако общепринятая терминология считает параллельными прямой a только «крайние» прямые b_1 и b_2, имеющие с ней общие точки на абсолюте; остальные

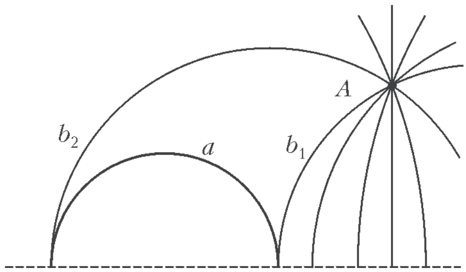

Рис. 12

прямые называются *расходящимися* с прямой a. В случае когда прямая a особая, одна из параллельных ей прямых тоже будет особой (рис.13).

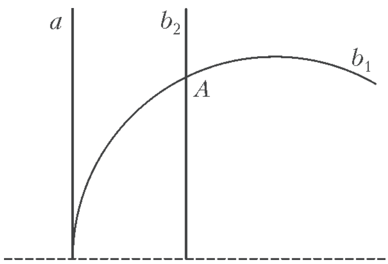

Рис. 13

В модели Пуанкаре симметрия относительно особой прямой определяется евклидовым образом (рис.14); роль же сим-

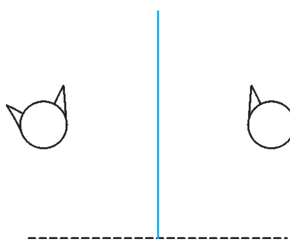

Рис. 14

метрии относительно неособой прямой играет замечательное преобразование плоскости, называемое *инверсией* (рис.15).

При инверсии относительно окружности (прямой в смысле Лобачевского) с центром O на абсолюте и радиусом R точка A переходит в точку A', лежащую на луче OA и такую, что $OA \cdot OA' = R^2$. Инверсия определена для всех точек плоскости, кроме O – к счастью, точка O лежит вне точек плоскости Лобачевского и поэтому нас не интересует. Инверсия

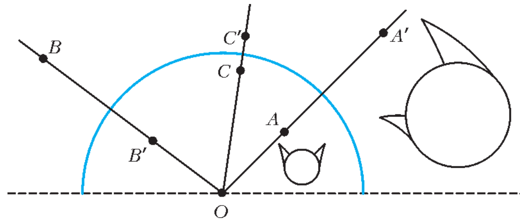

Рис. 15

обладает всеми свойствами[6], которые мы ожидаем от осевой симметрии:

- инверсия переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю полуплоскость;
- инверсия относительно полуокружности (прямой в смысле Лобачевского) a сохраняет точки, лежащие на самой a, на месте;
- инверсия переводит прямые (в смысле Лобачевского) в прямые (в смысле Лобачевского);
- инверсия сохраняет углы (угол между прямыми в смысле Лобачевского считается равным евклидову углу между касательными, проведенными в точке пересечения);
- если два раза применить одну и ту же инверсию, получится тождественное преобразование.

Далее, определив с помощью инверсий равенство отрезков в модели Пуанкаре, можно доказать в ней, как теоремы, аксиомы абсолютной геометрии и тем самым обосновать, что это действительно модель геометрии Лобачевского. Но об этом, как говорят исландцы, не говорится в этой саге.

О том же, как все-таки выглядят композиции двух и трех симметрий в геометрии Лобачевского, мы расскажем в следующем номере журнала.

[6] Подробнее о свойствах инверсии и ее применении в геометрических задачах можно прочитать в брошюре И.Д.Жижилкина «Инверсия» (Библиотека «Математическое просвещение», вып.35, МЦНМО, 2009).

(Продолжение следует)

Теорема Шаля в трех лицах

С.КУЗНЕЦОВ

ВЕРНЕМСЯ К ВЫЧИСЛЕНИЮ КОМПОЗИЦИИ двух симметрий, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$.

Итак, на плоскости Лобачевского возможны три случая: (1) прямые a и b пересекаются; (2) прямые a и b параллельны; (3) прямые a и b расходятся.

В случае (1), как и в евклидовой теореме Шаля, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ – поворот на угол, в два раза больший угла между прямыми a и b (рис.16). Точки при этом движутся по

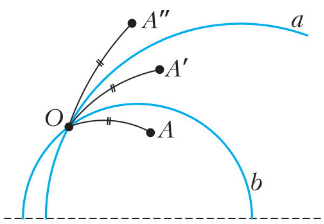

Рис. 16

окружностям с центром в точке O (рис.17). Заметим, что в модели Пуанкаре окружность в смысле Лобачевского оказалась

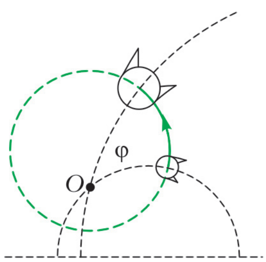

Рис. 17

евклидовой окружностью – однако «в лоб» это доказать не получится: центры в смысле Евклида и в смысле Лобачевского не совпадают. Доказать это можно с помощью одного из эквивалентных определений окружности; мы оставим это читателю в качестве упражнения (решение приведено в конце журнала).

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

В случае (2) сначала рассмотрим ситуацию, когда прямые a и b особые. Тогда, с евклидовой точки зрения, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ есть параллельный перенос вдоль абсолюта (рис.18). Таким образом, при этом преобразовании точки движутся вдоль прямых,

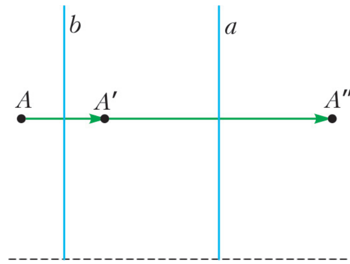

Рис. 18

параллельных абсолюту (рис.19). В геометрии Лобачевского эта траектория называется *орициклом*, т.е. предельным положением окружностей, «окружностью бесконечно большого радиуса». Здесь мы имеем дело с семейством орициклов, перпендикулярных прямым a и b, т.е. наше движение есть *сдвиг по семейству орициклов*.

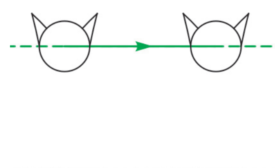

Рис. 19

Ситуация, когда прямые a и b неособые, сводится к уже рассмотренной с помощью симметрии, переводящей их в особые. При этом «особый» орицикл, выглядящий как прямая, параллельная абсолюту, переходит в «неособый» – евклидову окружность, касающуюся абсолюта (рис.20). Этот орицикл, хотя и изображается окружностью, незамкнут (как и исходный): точка

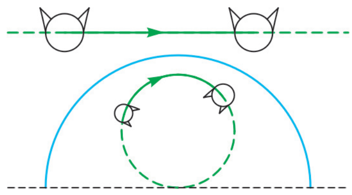

Рис. 20

касания с абсолютом лежит вне плоскости Лобачевского. Движение $\mathcal{F}'$ по новому орициклу *сопряжено* с движением $\mathcal{F}$ по исходному орициклу: $\mathcal{F}' = \mathbf{S}_l^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \mathbf{S}_l$. Здесь $\mathbf{S}_l^{-1}$ обозначает преобразование, обратное преобразованию $\mathbf{S}_l$; в данном случае это та же симметрия.

Сопряжение с помощью симметрии или с помощью другого изометрического преобразования – это как бы новый взгляд на ту же модель. Когда мы занимаемся геометрией на обычной евклидовой плоскости, мы можем вертеть листок с чертежом, выбирая более удобную точку зрения. Точно так же и здесь мы можем повернуть модель удобной к нам стороной – например, чтобы интересующая нас прямая оказалась особой. При сопряжении с помощью некоторого преобразования $\mathcal{D}$ движение $\mathcal{F}$ переходит в движение $\mathcal{F}'$ того же вида, но с другими параметрами. Например, симметрия $\mathbf{S}_l$ переходит в симметрию относительно другой прямой: $\mathcal{D}^{-1} \circ \mathbf{S}_l \circ \mathcal{D} = \mathbf{S}_{\mathcal{D}^{-1}(l)}$, поворот переходит в поворот относительно другого центра: $\mathcal{D}^{-1} \circ R_A^{\varphi} \circ \mathcal{D} = R^{\varphi}_{\mathcal{D}^{-1}(A)}$, и так далее.

Случай (3), когда прямые a и b расходятся, немного хитрее. Для начала докажем, что у любых двух расходящихся прямых есть общий перпендикуляр. Пусть расходящиеся прямые a и b неособые и выходят на абсолют в точках P_1, Q_1 и P_2, Q_2 соответственно, как показано на рисунке 21 (другие случаи расположения

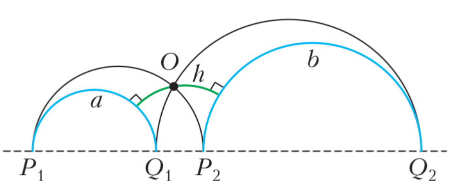

Рис. 21

прямых a и b сводятся к этому с помощью инверсии). Проведем прямые через P_1 и P_2 и через Q_1 и Q_2; они пересекутся в точке O. Поскольку прямые a и b центрально симметричны относительно O, перпендикуляры, опущенные на них из O, образуют одну прямую. Эта прямая и есть искомый общий перпендикуляр h.

Теперь применим симметрию, чтобы общий перпендикуляр h оказался особой прямой. Тогда a и b изобразятся концентрическими окружностями, а композиция симметрий (инверсий) $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ станет гомотетией с центром в точке O (рис.22).

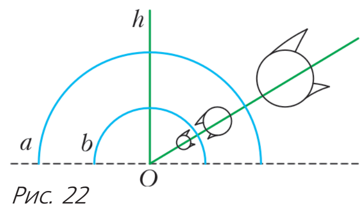

Рис. 22

Действительно, если при $\mathbf{S}_b$ точка A переходит в A', а при $\mathbf{S}_a$ точка A' переходит в A'', то

$$OA'' = R_2^2 / OA' =$$

$$= R_2^2 / \left(R_1^2 / OA \right) = \left(R_2^2 / R_1^2 \right) \cdot OA ,$$

где R_1 и R_2 – радиусы (в евклидовом смысле) полуокружностей a и b.

Опять посмотрим на траектории, по которым движутся точки при этой гомотетии. Это будут лучи, исходящие из точки O на абсолюте. Если взять две точки на одном таком луче и опустить перпендикуляры (в смысле Лобачевского) на особую прямую (рис.23), то эти перпендикуляры будут равны в смысле Лобачевского, так как совмещаются движением. Значит, все точки этой линии равноудалены от данной особой прямой. Поэтому эта линия назы-

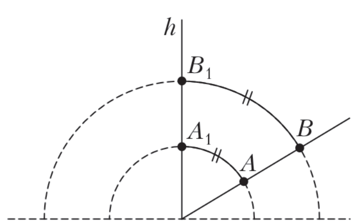

Рис. 23

вается *эквидистантой*, что значит «линия равных расстояний».

Как и в случае с движением по орициклу, к ситуации с неособой h можно перейти с помощью подходящей симметрии (рис.24).

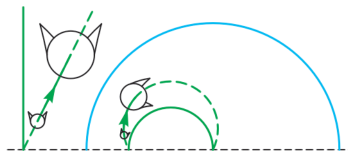

Рис. 24

Для краткости назовем движение по семейству эквидистант *скольжением*. Как мы знаем, скольжение вдоль прямой h есть композиция симметрий относительно двух прямых (a и b), перпендикулярных h. Понятие скольжения мы будем использовать и в двух других геометриях. В евклидовом случае скольжение есть параллельный перенос вдоль прямой h (рис.25);

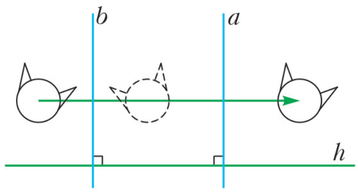

Рис. 25

роль эквидистант играют прямые, параллельные h. На сфере же скольжение оказывается поворотом. Это удобно представлять себе в «географических» терминах: если h считать экватором, то прямые a и b будут меридианами, а композиция $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ – поворотом вокруг северного (или, что то же самое, южного) полюса (рис.26). Роль эквидистант играют параллели (рис.27).

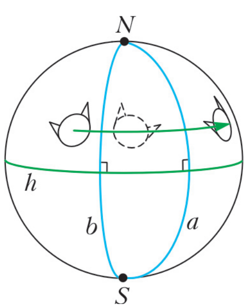

Рис. 26

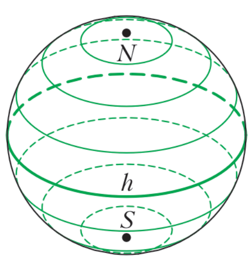

Рис. 27

Итак, на плоскости Лобачевского *композиция двух симметрий – это либо поворот, либо сдвиг по семейству орициклов, либо скольжение.* В евклидовом случае остаются только поворот и скольжение, а в сферическом и эти два случая совпадают и остается только поворот.

Заметим, что в каждом из трех случаев движение можно представить в виде композиции двух симметрий не единственным образом. Действительно, поворот $\mathbf{R}_A^{\varphi}$ равен $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ для *любых* двух прямых a и b, пересекающихся в точке A под углом $\varphi/2$ (напомним, что угол считается со знаком: важно, в каком порядке взяты его стороны). Следовательно, в качестве прямой a можно взять произвольную прямую, проходящую через точку A. Вторая прямая при этом определяется однозначно. То же самое происходит и в случаях (2) и (3). Для (2), перейдя с помощью сопряжения к особому случаю, мы можем взять в качестве a любую особую прямую, тогда b будет особой прямой на данном расстоянии от a. Для (3) в качестве a можно взять любую прямую, перпендикулярную h.

Для единообразия назовем то множество, из которого мы можем выбирать прямую a, *пучком* прямых. В случае (1) пучок состоит из прямых, проходящих через данную точку; в случае (2) – из параллельных прямых; наконец, в случае (3) – из прямых, перпендикулярных данной прямой h. Для евклидовой плоскости случаи (2) и (3) совпадают: пучок параллельных прямых и есть пучок прямых, перпендикулярных данной. На сфере же возможен только случай (1). Таким образом, во всех трех геометриях верно следующее утверждение.

Лемма о замене симметрий: *Композицию $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b$ можно записать также в виде $\mathbf{S}_{a_1} \circ \mathbf{S}_{b_1}$, где одна из прямых a_1 и b_1 выбирается произвольно из пучка, содержащего прямые a и b (другая прямая определяется однозначно).*

Эта лемма пригодится нам для вычисления **композиции трех симметрий**, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$. Постараемся провести рассуждения единообразно для всех трех геометрий: мы будем пользоваться только возможностью опускать перпендикуляр из данной точки на данную прямую, возможностью проводить прямую через две точки и сформулированной выше леммой о замене симметрий.

Сначала заменим прямые b и c на b_1 и c_1 так, что $\mathbf{S}_{b_1} \circ \mathbf{S}_{c_1} = \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c$ и прямые a и b_1 пересекаются. Для этого достаточно взять на прямой a произвольную точку и выбрать из пучка, содержащего прямые b и c, прямую b_1, проходящую через эту точку (в любом пучке, независимо от его вида, найдется прямая, проходящая через данную точку). Теперь выберем в пучке, содержащем прямые a и b_1, прямую b_2, перпендикулярную c_1 – иначе говоря, опустим перпендикуляр из точки пересечения прямых a и b_1 на прямую c_1 (рис. 28).

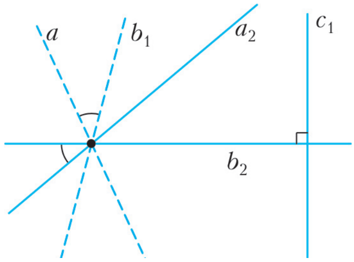

Рис. 28

После этого заменим прямые a и b_1 на прямые a_2 и b_2 с сохранением композиции первых двух симметрий ($\mathbf{S}_{a_2} \circ \mathbf{S}_{b_2} = \mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_{b_1}$). Наконец, заменим прямые b_2 и c_1 на прямые b_3 и c_3, где b_3 – перпендикуляр, опущенный из точки пересечения прямых b_2 и c_1 на прямую a_2 (рис.29). Заметим, что угол между прямыми при этом не меняется: b_3 по-прежнему перпендикулярна c_3.

Итак, $\mathbf{S}_a \circ \mathbf{S}_b \circ \mathbf{S}_c = \mathbf{S}_{a_2} \circ \mathbf{S}_{b_3} \circ \mathbf{S}_{c_3}$, где $a_2 \perp b_3$ и $b_3 \perp c_3$, т.е. b_3 – общий перпендикуляр прямых a_2 и c_3. Напоследок воспользуемся тем фактом, что симметрии относительно перпендикулярных прямых перестановочны (рис.30). Действительно,

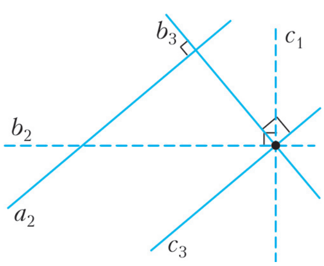

Рис. 29

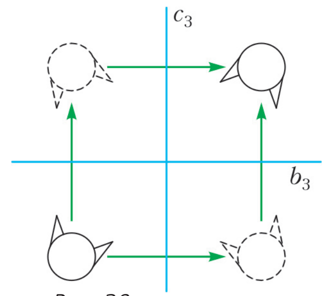

Рис. 30

их композиция есть поворот на 180° относительно их точки пересечения, а для угла 180° не имеет значения, в каком направлении его откладывать. Значит, наша композиция трех симметрий преобразуется в $\mathbf{S}_{a_2} \circ \mathbf{S}_{c_3} \circ \mathbf{S}_{b_3}$, причем $\mathbf{S}_{a_2} \circ \mathbf{S}_{c_3}$ как композиция симметрий относительно прямых с общим перпендикуляром b_3 есть скольжение вдоль b_3.

Как отмечено выше, эти рассуждения верны во всех трех геометриях (напомним, что в евклидовом случае скольжение есть параллельный перенос, а в сферическом – поворот). Значит, во всех трех геометриях композиция трех симметрий представляется как композиция симметрии и скольжения вдоль той же прямой, т.е. является *скользящей симметрией*.

Как и в евклидовом случае, обычная симметрия является частным случаем скользящей: если прямые a_2 и c_3 совпадают, то скольжения на самом деле нет.

Скользящая симметрия плоскости Лобачевского изображена на рисунках 31 и 32

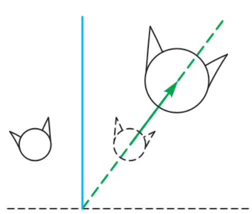

Рис. 31

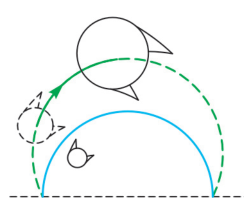

Рис. 32

(Продолжение см. на с. 10)

ет длинной цепочки превращений с участием ферментов, в то время как АТФ является конечным продуктом, «готовым к употреблению».

В каждый данный момент времени его содержание в организме чрезвычайно мало (см. сравнительную таблицу 4). Однако

Таблица 4

Уровень содержания в организме

	Жиры	Белки	Углеводы	АТФ
Содержание	десятки килограммов	килограммы	сотни граммов	десятки граммов

«производительность» АТФ колоссальна. Подсчитано, что за день в реакциях с высвобождением энергии расщепляется до уровня АДФ около 40 кг АТФ (половина массы тела человека!). Правда, столько же и ресинтезируется обратно. В итоге можно сказать, что АТФ «крутится» туда-сюда, как белка в колесе.

Аналогия с белкой в колесе просматривается и с другой стороны: АТФ, будучи довольно большой молекулой, не может «просочиться» сквозь мембраны и поэтому заперта в клетке. В результате свой набор «квантов» АТФ имеется в каждой клетке, и располагаются они в мембранах митохондрий.

АТФ обладает необычайно высокой скоростью обновления. Если принять, что в организме человека в каждый момент времени присутствует 20 г АТФ, и учесть, что за сутки расщепляется 40 кг АТФ, то выходит, что каждая молекула АТФ примерно 2000 раз расщепляется и затем вновь синтезируется, так что продолжительность ее жизни менее 1 мин!

Такое быстрое обновление АТФ чрезвычайно важно для живого организма. И в состоянии покоя 80% мощности метаболизма организм тратит с пользой – на «ремонт» клеток и на транспортировку веществ внутри них.

Теорема Шаля в трех лицах

(Начало см. на с. 2)

(особый и неособый случай соответственно), скользящая симметрия сферы – иначе говоря, композиция поворота и симметриии относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота, – на рисунке 33.

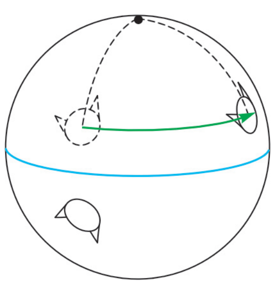

Рис. 33

Скользящую симметрию евклидовой плоскости мы рассмотрели в первой части статьи (см. рис.4).

Итак, мы перечислили все виды движений для каждой из трех геометрий, т.е. доказали следующую теорему.

Теорема Шаля в трех лицах:

• *Всякое движение сферы есть поворот или скользящая симметрия.*

• *Всякое движение евклидовой плоскости есть поворот, параллельный перенос или скользящая симметрия.*

• *Всякое движение плоскости Лобачевского есть поворот, сдвиг по семейству орициклов, скольжение (сдвиг по эквидистантам данной прямой) или скользящая симметрия.*

Статья написана по материалам лекций, прочитанных автором на Малом мехмате МГУ (Москва) и в ЮМШ (Санкт-Петербург) в 2015–2016 годах. Автор благодарит всех своих слушателей, прежде всего А.Зеленцову, И.Моторина и И.Токареву. Автор благодарен также А.Л.Канунникову и в особенности В.О.Бугаенко за ценные комментарии, позволившие значительно упростить и улучшить доказательство.